AÏCHA RAHMANI

Valeurs asymptotiques de familles holomorphes

Thèse
présentée
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de Philosophiae Doctor (Ph.D.)

Département de mathématiques et de statistique
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

Août 2001

0-612-65428-1

Résumé court

L'objectif principal de notre travail est d'établir l'analyticité d'une multifonction K construite à partir d'une famille $\{f_\lambda : \lambda \in D\}$, de fonctions entières, qui dépend d'une manière holomorphe de λ variant dans un domaine D de $\mathbb{C}$, en faisant correspondre à chaque λ, l'ensemble des valeurs asymptotiques finies de f_λ.

En utilisant les résultats de Nevanlinna sur les fonctions méromorphes dont la dérivée schwarzienne est un polynôme, nous avons montré que si $\{f_\lambda, \lambda \in D\}$ est une famille de fonctions entières qui dépend d'une manière holomorphe de $\lambda \in D$, et si f_λ est d'ordre fini, a un nombre fini de valeurs asymptotiques, et n'a pas de points critiques pour tout $\lambda \in D$, alors il existe un entier p et un sous-ensemble discret E de D tels que f_λ possède exactement p valeurs asymptotiques pour tout $\lambda \in D \setminus E$.

A l'aide de cette caractérisation, nous avons montré que la multifonction K est analytique dans un sous-ensemble ouvert et dense de D, où elle admet des sélections holomorphes locales.

Résumé long

Nous nous proposons dans cette thèse, d'étudier le problème suivant:
Nous considérons une famille $\{f_\lambda : \lambda \in D\}$ de fonctions entières qui dépend d'une manière holomorphe de $\lambda \in D$, où D est un domaine de $\mathbb{C}$, et nous lui associons la multifonction K définie par:

$$\begin{array}{rcll} K: & D & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mathbb{C}) \\ & \lambda & \longmapsto & A(f_\lambda) \end{array}$$

où $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ est l'ensemble de tous les compacts non vides de $\mathbb{C}$, et $A(f_\lambda)$ désigne l'ensemble des valeurs asymptotiques finies de la fonction f_λ. Nous nous proposons alors d'étudier l'analyticité de la multifonction K.
Nous avons imposé des conditions supplémentaires aux fonctions f_λ de manière à satisfaire à une caractérisation de R. Nevanlinna, publiée en 1932, et qui consiste en ce qui suit: une fonction méromorphe d'ordre fini admet p valeurs asymptotiques avec $p \geq 2$, et n'a pas de points critiques si et seulement si sa dérivée schwarzienne est égale à un polynôme de degré $p-2$.
En utilisant cette caractérisation, nous avons montré que si $\{f_\lambda, \lambda \in D\}$, est une famille de fonctions entières qui dépend d'une manière holomorphe de $\lambda \in D$, et si f_λ est d'ordre fini, a un nombre fini de valeurs asymptotiques, et n'a pas de points critiques pour tout $\lambda \in D$, alors il existe un entier p et un sous-ensemble discret E de D tels que f_λ a exactement p valeurs asymptotiques pour tout $\lambda \in D \setminus E$.
La démarche basée sur les résultats de R. Nevanlinna que nous avons suivie, nous a conduite à une solution partielle de notre problème, en l'occurrence, la multifonction K est analytique dans un ouvert dense de D, en montrant qu'elle admet des sélections holomorphes locales dans cet ouvert.

Remerciements

Je profite de l'occasion qui m'est offerte pour exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui m'ont soutenue de multiples manières, afin de mener à terme la réalisation de cette thèse de doctorat.

J'adresse d'abord mes remerciements à Madame Line Baribeau, ma directrice de recherche. En voyant sa hardiesse face aux thèmes compliqués de l'analyse complexe, je n'avais d'autre choix que de m'y introduire à mon tour, et elle a su m'apporter le support intellectuel et moral dont j'avais besoin.

Mes remerciements vont également à Monsieur Thomas J. Ransford, avec qui j'ai suivi certains de mes cours gradués, qui étaient fort intéressants aussi bien par leur contenu, que par la méthode originale avec laquelle il nous les présentait. Je le remercie aussi d'avoir accepté de faire la prélecture de ma thèse, et de m'avoir communiqué les corrections qu'il a jugées necéssaires.

Je remercie infiniment les professeurs Jean-Jacque Gervais et André Boivin, qui ont accepté de faire partie du jury qui a examiné ma thèse. Je remercie particulièrement Monsieur André Boivin dont le souci de la précision manifesté à l'égard de mon travail, à travers ses remarques et ses suggestions, a contribué à la clarté de mon texte.

Je suis très reconnaissante envers Monsieur Walter Hengartner, qui a accepté de traduire pour moi, une partie de l'article de Rolf Nevanlinna, de l'allemand vers le français, et en qui j'ai trouvé le professeur expérimenté et généreux de ses précieux conseils.

Le support financier de ce travail m'a été assuré grâce aux fonds F.C.A.R. du ministère de l'éducation de Québec, et aux différentes aides de l'université Laval et du département de mathématiques et de statistiques, je les en remercie.

Je remercie tous les professeurs et le personnel du département de mathématiques.

ainsi que tous les étudiants et les amis que j'ai rencontrés à l'Université Laval, et dans la ville de Québec en général.

Enfin, je termine ma liste de remerciements par les personnes envers qui je suis le plus redevable, les membres de ma famille. Leur appui et leur encouragement ont été continuels à mon égard.

Table des matières

Introduction

La notion de multifonctions analytiques a connu une existence vague et floue depuis son commencement avec K. Oka dans son article [24], apparu en 1934, jusqu'à ce qu'on s'y intéresse à nouveau, plusieurs décennies plus tard. C'est ainsi que par la suite, l'acharnement de plusieurs chercheurs laborieux pour résoudre des problèmes d'analyse spectrale ou de fonctions à plusieurs variables complexes à l'aide de cette notion, les a conduits à donner des définitions précises et construire des fondements solides pour la théorie de multifonctions analytiques, comme le montrent les références [1, 2, 26, 29]. Cette nouvelle notion n'a pas seulement permis de résoudre les problèmes qui ont motivé son développement, elle a aussi trouvé des applications intéressantes auprès d'autres disciplines de l'analyse. Par exemple, dans [3], les deux auteurs L. Baribeau et T. J. Ransford l'ont appliquée dans la théorie de l'itération des fonctions rationnelles. Ils ont étudié dans leur article plusieurs multifonctions méromorphes reliées à une famille holomorphe de fonctions rationnelles $\{R_\lambda, \lambda \in D\}$, où D est un domaine de $\mathbb{C}$. Parmi ces multifonctions, on retrouve celle associée aux orbites des points critiques qui jouent un rôle très important dans l'itération des fonctions rationnelles.

Lorsqu'on étend l'étude de l'itération aux fonctions analytiques transcendantes, le rôle joué par les points critiques dans le cas des fonctions rationnelles, est rempli ici conjointement par les points critiques et les valeurs asymptotiques. C'est justement en raison de l'importance de ces dernières valeurs que nous en avons fait l'objet principal de notre thèse. Nous nous sommes penchée sur le problème, proposé par Mme Baribeau, de déterminer si la multifonction K associée à une famille de fonctions entières ou méromorphes $\{f_\lambda : \lambda \in D\}$, qui dépend d'une manière holomorphe de λ variant dans un domaine D de $\mathbb{C}$, de la façon suivante:

$$\begin{array}{rccc} K: & D & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mathbb{C}) \\ & \lambda & \longmapsto & A(f_\lambda) \end{array}$$

où $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ est l'ensemble de tous les compacts non vides de $\mathbb{C}$, et $A(f_\lambda)$ désigne l'ensemble de toutes les valeurs asymptotiques finies de f_λ, est une multifonction analytique.

Dans le premier chapitre, nous avons rassemblé certaines informations sur la notion de valeurs singulières, et plus particulièrement de valeurs asymptotiques, d'une fonction méromorphe. Nous nous sommes limitée aux aspects de cette notion qui ont été réellement utilisés pour la résolution de notre problème. Nous avons donc parlé du rapport étroit qui existe entre ces valeurs et les singularités de la fonction inverse, et de la convergence des valeurs singulières. Nous avons aussi mentionné brièvement la relation entre l'ordre d'une fonction méromorphe et le nombre de ses valeurs asymptotiques.

Une fois que les valeurs asymptotiques ont été identifiées, nous étions confrontée à la grande diversité des ensembles constitués par toutes les valeurs asymptotiques d'une fonction méromorphe. Pour cette raison, nous avons réduit notre problème au cas des fonctions méromorphes d'ordre fini, sans points critiques et ayant un ensemble fini de valeurs asymptotiques. Le deuxième chapitre leur est entièrement consacré. Il contient un exposé de l'étude de R. Nevanlinna réalisée sur les fonctions méromorphes dont la dérivée schwarzienne est un polynôme, et publiée dans un précieux article en allemand [23] en 1932. Nous ne disposons malheureusement que de la traduction de la section 9 de cet article, que le professeur W. Hengartner a bien voulu faire pour nous, dans laquelle Nevanlinna a montré qu'une fonction méromorphe dont la dérivée schwarzienne est un polynôme, est une fonction d'ordre fini, qui n'a pas de points critiques, et qui possède un nombre fini de valeurs asymptotiques. Pour obtenir l'autre sens de cette caractérisation, nous avons fait appel à des résultats de la théorie de Nevanlinna, développés dans d'autres travaux, par exemple [9, 11, 21]. Nous avons, par la suite, donné une certaine généralisation de cette caractérisation à une famille de fonctions entières d'ordre fini, sans points critiques, dépendant d'une manière holomorphe d'un paramètre, et qui admettent un ensemble fini de valeurs asymptotiques. Nous avons notamment montré que pour une telle famille, on peut trouver un entier p commun à toutes les fonctions de la famille sauf peut-être pour un ensemble dénombrable d'entre elles, qui représente le nombre de leurs valeurs asymptotiques comptées avec leur multiplicité. Nous avons terminé ce chapitre par une expression générale des fonctions qui possèdent les caractéristiques de Nevanlinna.

Munie de la caractérisation de Nevanlinna d'une fonction entière d'ordre fini sans points critiques et qui admet un nombre fini de valeurs asymptotiques, ainsi que de sa généralisation à une famille de telles fonctions qui dépend holomorphiquement d'un paramètre appartenant à un domaine D de $\mathbb{C}$, nous avons essayé de donner une réponse affirmative au problème posé par Mme Baribeau dans le cas de ces fonctions. Nous sommes parvenue à une solution partielle de ce problème, présentée dans le théorème (3.2), et qui réalise l'analyticité de la multifonction K dans un sous-ensemble ouvert et dense de D, en montrant qu'elle possède des sélections holomorphes locales dans cet ouvert.
Nous avons terminé ce chapitre par quelques exemples de familles de fonctions $\{f_\lambda , \lambda \in D\}$ plus générales que celles déjà étudiées, et pour lesquelles la multifonction construite à partir des valeurs asymptotiques finies est analytique. Nous avons donné aussi, un exemple d'une situation où cette propriété n'est pas satisfaite.

Chapitre 1

Valeurs singulières

Ce premier chapitre est consacré à présenter les valeurs asymptotiques. et plus généralement les valeurs singulières d'une fonction méromorphe. Il contient donc quelques propriétés et résultats déjà connus concernant ces valeurs. et qui seront utilisés dans les chapitres suivants.

1.1 Valeurs asymptotiques d'une fonction méromorphe

Définition 1.1 *Soit f une fonction méromorphe. On dit qu'un nombre complexe a est une* valeur asymptotique *de f s'il existe une courbe Γ partant d'un point donné vers l'infini. telle que $f(z)$ tend vers a quand z tend vers l'infini suivant Γ:*

$$f(z) \to a \quad \textit{quand} \quad |z| \to \infty \quad \textit{et} \quad z \in \Gamma.$$

Le point a peut être infini. la même définition d'une valeur asymptotique prévaut aussi dans ce cas.

Exemple 1.1 La fonction $f(z) = e^z$ admet les points 0 et ∞ comme valeurs asymptotiques. En effet. $e^z \to 0$ quand $|z| \to \infty$ le long du demi-axe réel négatif. et $e^z \to \infty$ quand $|z| \to \infty$ le long du demi-axe réel positif.

Le point ∞ est une valeur asymptotique de e^z, ceci n'est pas une propriété isolée de la fonction exponentielle, car toute fonction entière la possède aussi, et plus généralement on a:

Théorème 1.1 *Toute fonction méromorphe non constante qui a une singularité isolée essentielle à l'infini admet le point ∞ comme valeur asymptotique.*

On peut trouver la démonstration de ce théorème dans le livre [30, page 284a] de E. C. Titchmarsh. Un autre exemple de valeurs asymptotiques est donné dans le même livre dans le cas d'une valeur lacunaire au sens de Picard d'une fonction entière, c'est-à-dire une valeur omise par la fonction:

Théorème 1.2 *Si un point a est une valeur lacunaire d'une fonction entière f, alors a est une valeur asymptotique de f.*

Démonstration
Si a est une valeur lacunaire de f, alors $\frac{1}{f(z) - a}$ est une fonction entière, et par suite elle admet le point ∞ comme valeur asymptotique. ◇

La courbe Γ qui mène à une valeur asymptotique a s'appelle un chemin asymptotique de détermination a, et il n'est pas unique. Ceci a amené G. Valiron [31, page 90] à introduire la notion de chemins contigus à l'aide de la définition suivante:

Définition 1.2 *Deux chemins Γ et Γ' de même détermination a sont* contigus *dans les deux cas suivants:*

1. *Γ et Γ' ont des points d'intersection aussi éloignés que l'on veut.*

2. *Γ et Γ' sont sans points communs à partir d'un point P qu'on peut considérer comme leur origine commune, ils déterminent alors deux domaines Δ et Δ', dans l'un de ces domaines, soit Δ, existe une suite de courbes γ_n qui s'éloignent indéfiniment lorsque n croît indéfiniment, telles que chaque γ_n joint un point de Γ à un point de Γ' et que les valeurs de $f(z)$ sur γ_n tendent uniformément vers a lorsque $n \to \infty$.*

On voit donc que lorsque a est une valeur asymptotique finie de f, et que Γ et Γ' sont contigus et n'ont pas de points communs à partir d'un certain point P, la fonction f reste bornée dans l'un des deux domaines infinis délimités par ces deux courbes.
Cette notion permet de définir une multiplicité pour les valeurs asymptotiques. Si a et a' sont deux telles valeurs et Γ et Γ' leurs chemins de détermination respectifs, alors, même lorsque $a = a'$, on considère a et a' comme deux valeurs asymptotiques distinctes

si Γ et Γ' ne sont pas contigus. La *multiplicité* de la valeur asymptotique a sera égale au nombre de chemins asymptotiques non contigus de détermination a.

Exemple 1.2 La fonction $f(z) = e^{-z^2}$ admet le point 0 comme valeur asymptotique. Les deux demi-axes réels positif et négatif sont des chemins de détermination 0, mais la fonction f n'est bornée sur aucun des demi-plans supérieur et inférieur. Donc 0 est une valeur asymptotique de f de multiplicité au moins égale à 2.
On remarque aussi que la valeur asymptotique infinie est de multiplicité au moins 2, parce que les deux demi-axes imaginaires supérieur et inférieur sont des chemins distincts de détermination ∞ qui ne peuvent satisfaire à la deuxième condition de la définition (1.2).

1.2 Relation entre l'ordre d'une fonction méromorphe et ses valeurs asymptotiques

1.2.1 Cas des fonctions entières

Définition 1.3 *Soit f une fonction entière, son* ordre *ρ est défini par*

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r},$$

où $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

L'ordre ρ d'une fonction entière peut être nul, fini positif, ou infini.

Exemple 1.3 L'ordre de la fonction $e^{P(z)}$ où $P(z)$ est un polynôme, est égal au degré de ce polynôme.

Au tout début de ce siècle, A. Denjoy s'est intéressé à l'éventuelle relation qui peut exister entre l'ordre d'une fonction entière et son comportement asymptotique. Il a exprimé ses idées à travers une conjecture posée en 1907 dans [7], mais il a fallu attendre L. Ahlfors en 1930 pour avoir une démonstration de cette conjecture sous la forme précise qui suit:

Théorème 1.3 *Soit f une fonction entière d'ordre fini égal à ρ. Alors f a au plus $[2\rho]$ valeurs asymptotiques finies et distinctes. Ici $[2\rho]$ désigne la partie entière de 2ρ.*

Je n'ai pas eu accès à la référence en allemand où Ahlfors a montré la conjecture de Denjoy, mais on peut retrouver la démonstration de cette conjecture dans des livres d'analyse complexe plus récents, comme par exemple [21, page 307], ou [32, page 209].

1.2.2 Cas des fonctions méromorphes

Avant d'examiner la validité de la conjecture de Denjoy dans le cas d'une fonction méromorphe, il faut d'abord définir l'ordre d'une telle fonction.

En utilisant les notations de Nevanlinna, on obtient une expression de l'ordre d'une fonction entière qui convient aussi à une fonction méromorphe.

Soient f une fonction méromorphe et r un nombre strictement positif. On note respectivement par $n(r,0)$ et $n(r,\infty)$ les nombres des zéros et des pôles de f dans le disque $\Delta(0,r)$, comptés avec leur multiplicité. De même, si ζ est un nombre complexe quelconque, on note par $n(r,\zeta)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = \zeta$ dans le disque $\Delta(0,r)$, en tenant compte de leur multiplicité, et pour $r = 0$, $n(0,\zeta)$ désigne le nombre de racines de $f(z) = \zeta$ localisées au point 0.

On pose pour $\zeta \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} N(r,\zeta) &= \int_0^r \frac{n(t,\zeta) - n(0,\zeta)}{t} dt + n(0,\zeta)\log r \\ m(r,\zeta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\theta}) - \zeta} \right| d\theta \ . \end{aligned}$$

et pour $\zeta = \infty$, on pose:

$$\begin{aligned} N(r,\infty) &= \int_0^r \frac{n(t,\infty) - n(0,\infty)}{t} dt + n(0,\infty)\log r \\ m(r,\infty) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta \ . \end{aligned}$$

La fonction caractéristique de Nevanlinna de la fonction f est définie par:

$$T(r,f) = m(r,\infty) + N(r,\infty).$$

Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion sur la fonction f en question, on note sa fonction caractéristique simplement par $T(r)$. L'intérêt de la fonction caractéristique $T(r)$ d'une fonction méromorphe dans le disque $\Delta(0,R)$ avec $0 < R \leq \infty$, découle du premier théorème de Nevanlinna, selon lequel la quantité $m(r,\zeta)+N(r,\zeta)$ est invariante en ζ pour $r < R$, à une fonction bornée près.

Si f est une fonction entière, alors son ordre (voir par exemple [21], ou [22]), satisfait à l'égalité

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r)}{\log r} \ .$$

Cette nouvelle expression de ρ peut s'étendre au cas d'une fonction méromorphe, et permet alors de définir l'ordre d'une telle fonction.

Définition 1.4 *Soient f une fonction méromorphe et $T(r)$ sa fonction caractéristique de Nevanlinna. Alors* l'ordre *de f est défini par*

$$\rho = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log T(r)}{\log r}.$$

La conjecture de Denjoy n'est pas toujours valide dans le cas d'une fonction méromorphe. A. Eremenko [10] a construit un exemple d'une fonction méromorphe d'ordre fini dont l'ensemble des valeurs asymptotiques est égal à $\mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$. Cependant, il existe une classification plus précise des valeurs singulières d'une fonction méromorphe (qui seront définies plus tard), donnée par Iversen [15] (voir aussi [21] et [31]), et selon laquelle une valeur singulière a sera dite *directe* si on peut trouver un nombre $r > 0$, tel que l'équation $f(z) = a$ n'admette aucune solution dans $f^{-1}(\Delta(a, r))$, et elle sera dite *indirecte* dans le cas contraire. En tenant compte de cette classification (voir [4]), W. Bergweiler et A. Eremenko ont établi qu'une fonction méromorphe d'ordre fini ρ a au plus $[2\rho]$ valeurs asymptotiques directes, et ses autres valeurs asymptotiques sont indirectes et se présentent comme des limites de suites infinies de valeurs critiques. Ils en déduisent alors

Proposition 1.1 [4, corollaire 3]
Si f est une fonction méromorphe d'ordre fini ρ, et si elle n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques, alors elle possède au plus $[2\rho]$ valeurs asymptotiques finies et distinctes.

Remarque 1.1 En tenant compte de la classification d'Iversen des valeurs singulières en directes et indirectes, nous obtenons la précision de la conjecture de Denjoy pour les fonctions entières d'ordre p (pas nécessairement entier), énoncée dans [21, pages 303, 307], et qui exprime ce qui suit:

Théorème 1.4 *Soit f une fonction entière d'ordre fini p, alors*

1. *f possède au plus p valeurs asymptotiques directes.*

2. *Si le nombre de valeurs asymptotiques finies de f atteint le maximum de $2p$, alors elles sont toutes indirectes.*

Nous pouvons voir par exemple, que la fonction entière $\exp(-z^2)$, qui est d'ordre 2, possède la valeur asymptotique double et directe localisée en $z = 0$, donc elle n'admet pas d'autres valeurs asymptotiques finies. Par contre, la fonction entière d'ordre p:

$$f(z) = \int_0^z \frac{\sin t^p}{t^p} dt ,$$

fournit un exemple où le nombre maximum de valeurs asymptotiques est atteint. Elle en possède $2p$, qui sont toutes distinctes et indirectes; chacune d'elles est une limite de valeurs critiques de f. (Voir le calcul de ces valeurs asymptotiques juste avant l'exemple 3.5).

1.3 Prolongement analytique

Quand on définit une fonction holomorphe ou méromorphe. on désigne aussitôt un domaine du plan complexe dans lequel elle est définie. c'est pour cela qu'on a choisi un terme qui exprime ce fait:

Définition 1.5 *On appelle* élément de fonction holomorphe *ou* méromorphe, *tout couple* (f, D) *tel que* D *est un domaine de* $\mathbb{C}$. *et* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *est une fonction holomorphe ou méromorphe. selon le cas.*

On se donne un élément de fonction holomorphe (f, D). Une fonction g est un prolongement analytique de f si on peut trouver un domaine G de $\mathbb{C}$ tel que $D \subset G$, la fonction g est holomorphe sur G, et sa restriction à D coïncide avec la fonction f.
Il existe d'autres aspects du prolongement analytique qui sont plus pratiques pour définir une fonction à partir d'un de ses éléments de fonction:
Soit (f, D) un élément de fonction holomorphe, et soit D_1 un domaine différent de D et tel que $D \bigcap D_1 \neq \emptyset$. Si on peut trouver une fonction f_1 holomorphe sur D_1 et telle que $f \equiv f_1$ sur $D \bigcap D_1$, alors on considère que f et f_1 sont des prolongements analytiques l'une de l'autre. et que (f, D) et (f_1, D_1) sont deux éléments holomorphes de la même fonction. En général on prend comme élément de fonction initial une fonction f représentée par son développement de Taylor au voisinage d'un point z_0 et son disque de convergence D, ensuite on écrit le développement de Taylor de f autour d'un autre point $z_1 \in D$, pour trouver f_1 sous forme d'une série entière et D_1 est son disque de convergence. Ceci constitue le principe du prolongement analytique au sens de Weierstrass.
On peut réaliser ce même type de prolongement en suivant une courbe rectifiable Γ

partant du point z_0 et aboutissant à un point quelconque z_n. On s'impose dans ce cas la contrainte supplémentaire que les domaines des éléments de fonction qui forment le prolongement analytique sont les disques de convergence des séries de Taylor obtenues. et sont centrés en des points de la courbe Γ.

La fonction définie par un prolongement analytique au sens de Weierstass n'est pas toujours holomorphe sur le domaine constitué par la réunion des domaines de ses éléments de fonction. Le théorème de monodromie suivant, présente justement une situation où l'holomorphie est réalisée.

Théorème 1.5 *Soient D un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$ et Δ un sous-domaine non vide de D. Si (f, Δ) est un élément de fonction holomorphe qui peut être prolongé analytiquement suivant toute courbe dans D, alors il existe une fonction unique, holomorphe sur D. qui soit le prolongement analytique de f à D.*

La théorie du prolongement analytique. ainsi que la démonstration de ce théorème. se retrouvent dans les livres classiques d'analyse complexe. comme par exemple [12] et [16].

Si on part d'un élément de fonction méromorphe. on définit de la même manière un prolongement méromorphe.

1.4 Valeurs singulières d'une fonction méromorphe

La première partie de cette section provient essentiellement de la thèse de F. Iversen: "*Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*", réalisée en 1914. dans laquelle il a étudié les points singuliers de la fonction inverse d'une fonction méromorphe, qui correspondent exactement aux valeurs singulières de la fonction en question. Notons toutefois que l'expression "point critique pour la fonction inverse" qu'il a souvent utilisée est remplacée dans ce texte par "point singulier de la fonction inverse", pour réserver la terminologie de points critiques pour ceux où la fonction dérivée s'annule.

On considère une fonction méromorphe $w = f(z)$, et on s'intéresse à déterminer sa fonction inverse $z = \phi(w)$ à l'aide de ses éléments de fonction.

Si z_0 est un point régulier de la fonction f, c'est-à-dire un point en lequel la dérivée

$f'(z_0)$ existe et est différente de 0 et de ∞, alors f est une fonction holomorphe et univalente au voisinage de z_0. En utilisant le théorème des fonctions implicites, on peut trouver pour sa fonction inverse, un élément de fonction holomorphe au voisinage de $w_0 = f(z_0)$. On peut exprimer cette fonction inverse au voisinage du point w_0 par son développement de Taylor, et on détermine alors le rayon de convergence de la série obtenue. A partir de ce premier élément, on peut définir d'autres éléments de la fonction $\phi(w)$ par prolongement analytique au sens de Weierstrass, ainsi que les rayons de leurs disques de convergence.

Lorsque z_0 est un pôle simple de la fonction $w = f(z)$, on cherche la fonction inverse de la fonction méromorphe $1/f(z)$ au voisinage de zéro, et on obtient ainsi un élément régulier de la fonction inverse de $f(z)$ au voisinage de $w = \infty$.

1.4.1 Définition des valeurs singulières

Soit z_0 un point régulier de f, alors on a un élément holomorphe de la fonction inverse $z = \phi(w)$ au voisinage de $w_0 = f(z_0)$. On se donne un chemin G partant du point w_0, et on considère les éléments de fonction successifs obtenus en prolongeant l'élément initial suivant le chemin G. Un point ω de G est un point *singulier* de la fonction inverse $\phi(w)$ si les rayons de convergence de ces éléments de fonction décroissent vers zéro lorsque w tend vers ω.

Proposition 1.2 [15, page 7]
Si on prolonge un élément de la fonction inverse $z = \phi(w)$ suivant un chemin aboutissant à un point singulier ω, alors z tend soit vers une valeur finie ζ satisfaisant à $f(\zeta) = \omega$, soit vers l'infini.

Si z tend vers une valeur finie ζ lorsque w tend vers un point singulier ω, alors on a nécessairement $f'(\zeta) = 0$ (autrement, la fonction inverse de f admettrait au voisinage de ω, un élément de fonction régulier avec un rayon de convergence > 0). Le point ω est donc une valeur critique de la fonction f. Un point qui possède cette propriété est appelé selon Iversen, *point singulier algébrique* de la fonction inverse. De plus, si on note par k le plus petit entier tel que $f^{(k)}(\zeta) \neq 0$, alors la fonction inverse $z = \phi(w)$ est représentée au voisinage de ω, par k branches distinctes, définissant ainsi une surface de Riemann à k feuillets pour laquelle ω est un point de ramification d'ordre k.

Regardons maintenant le cas où z tend vers l'infini quand w tend vers le point singulier ω suivant G. Notons par Γ la courbe infinie décrite par $z = \phi(w)$ lorsque w tend vers ω suivant G.

Pour $r > 0$ assez petit, considérons le disque $\Delta(\omega, r)$ de centre ω et de rayon r. A partir d'un certain point z_r de Γ, on aura $|f(z) - \omega| < r$, pour tout $z \in \Gamma$ situé au-delà de z_r. La fonction inverse ϕ de f est définie par un élément de fonction holomorphe au voisinage du point $w_r = f(z_r)$. Considérons ensuite tous les prolongements analytiques suivant tous les chemins possibles partant de w_r et contenus dans $\Delta(\omega, r)$, et notons par Δ_r l'ensemble connexe constitué des points z, images des éléments de fonction obtenus, et de leurs points d'accumulation. En faisant tendre r vers 0, l'ensemble Δ_r tend vers un ensemble-limite connexe Δ_0 qui se réduit dans ce cas au seul point infini. Un point singulier de la fonction inverse qui a cette propriété est dit *transcendant*, (les autres points singuliers qu'on peut rencontrer sont les points singuliers essentiels qui peuvent exister lorsque le domaine-limite Δ_0 n'est pas réduit à un seul point, comme par exemple la fonction $\phi(w) = \log \sin \frac{1}{w}$ donnée dans [15], mais les fonctions inverses qu'on étudie dans notre contexte n'admettent pas de telles singularités).

Proposition 1.3 [15, page 12]
La fonction inverse d'une fonction méromorphe n'admet d'autres singularités que les points singuliers algébriques et les points transcendants.

On voit clairement qu'un point singulier transcendant ω de la fonction inverse d'une fonction méromorphe f, détermine un chemin Γ qui s'étend à l'infini, et suivant lequel la fonction f tend vers ω, ce qui en fait une valeur asymptotique de f. La réciproque est aussi vraie et on a le résultat suivant:

Théorème 1.6 [15, page 13]
Les points transcendants de la fonction inverse $z = \phi(w)$ se confondent avec les valeurs asymptotiques de la fonction méromorphe $w = f(z)$.

Voici maintenant une proposition sur le nombre minimal de valeurs asymptotiques de certaines fonctions, qu'Iversen a établie dans sa thèse en utilisant les résultats qu'il a obtenus sur les singularités de la fonction inverse:

Proposition 1.4 [15, page 14]
Si une fonction méromorphe n'admet qu'un nombre fini de pôles multiples, et si sa

dérivée n'admet qu'un nombre fini de zéros, alors la fonction présente au moins deux valeurs asymptotiques.

Après cette introduction des fonctions inverses, on est maintenant en mesure d'énoncer la définition précise des valeurs singulières qui sera utilisée par la suite.

Définition 1.6 *Soit f une fonction méromorphe. Un point ω est une* valeur singulière *de f si pour tout voisinage Ω de ω, il existe une branche de la fonction inverse de f qui n'est pas holomorphe sur Ω.*

Comme les valeurs singulières d'une fonction méromorphe f coïncident avec les singularités de sa fonction inverse, on a pris l'habitude de noter leur ensemble par $sing(f^{-1})$. Cet ensemble est constitué des valeurs critiques de f, de ses valeurs asymptotiques, et des points d'accumulation de suites de points de ces deux types.

1.4.2 Convergence des valeurs singulières

Lorsqu'une suite de fonctions entières $\{f_n\}$ converge localement uniformément sur $\mathbb{C}$ vers une certaine fonction f, on observe en général que pour n assez grand, les fonctions f_n et f ont des propriétés similaires. C'est dans cet esprit qu'on a cherché à connaître le comportement des fonctions f_n quand la fonction limite f possède une valeur singulière.
Dans son article [17], M. Kisaka s'est intéressé à ce problème, et il a donné le théorème de convergence des valeurs singulières, qu'on va reprendre ici avec sa démonstration détaillée, parce qu'elle comporte des techniques qui seront utilisées au troisième chapitre. Les deux auteurs B. Krauskopf et A. Kriete ont traité cette question dans leur article [18], et ils ont démontré ce même théorème en utilisant la convergence en noyau d'une famille de domaines, leur démonstration contient cependant quelques points qui nous paraissent obscurs.

Théorème 1.7 *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions entières qui converge localement uniformément sur $\mathbb{C}$ vers une fonction f. Soit $w \in \mathbb{C}$ une valeur singulière de f. Alors il existe une suite $\{w_n\}$ telle que $\lim_{n\to\infty} w_n = w$, et w_n est une valeur singulière de f_n pour presque tout n.*

L'expression "pour presque tout n" signifie ici que la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ sauf peut-être pour un nombre fini d'entiers.

On aura besoin du théorème de Hurwitz pour établir le résultat énoncé dans le cas où la valeur singulière en question est une valeur critique de f. Voici la version de ce théorème comme elle a été donnée par E. Hille [12]:

Théorème 1.8 *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions holomorphes dans un domaine D. On suppose que $\{f_n\}$ converge uniformément dans D vers une fonction f. Soit $z = a$ un zéro de f. Alors pour tout ϵ vérifiant $\overline{\Delta(a, \epsilon)} \subset D$, il existe N_ϵ tel que pour tout $n > N_\epsilon$, la fonction f_n possède le même nombre de zéros que f dans le disque $\{|z - a| < \epsilon\}$.*

Le théorème de Hurwitz reste valide lorsque la convergence de la suite de fonctions est seulement localement uniforme sur D.

Théorème 1.9 *Soient D un domaine de $\mathbb{C}$, et $\{f_n\}$ une suite de fonctions holomorphes sur D. On suppose que $\{f_n\}$ converge localement uniformément sur D, vers une fonction non constante f. Pour tout disque Δ tel que $\overline{\Delta} \subset D$, et $f \neq 0$ sur $\partial\Delta$, il existe un entier N_Δ tel que pour $n \geq N_\Delta$. f_n et f ont le même nombre de zéros dans Δ.*

Démonstration du théorème 1.7

Supposons d'abord que w est une valeur critique de f. Alors il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $f(c) = w$ et $f'(c) = 0$. Pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, on peut trouver $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in \Delta(c, \delta)$ on ait

$$|f(z) - f(c)| < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Par le théorème de Hurwitz, appliqué à la suite $\{f'_n\}$ qui converge localement uniformément vers f', on obtient que pour n assez grand, f'_n et f' ont le même nombre de zéros dans $\Delta(c, \delta)$. Soit donc $c_n \in \Delta(c, \delta)$ tel que $f'_n(c_n) = 0$ pour n supérieur à un certain N_1. Par la convergence localement uniforme de $\{f_n\}$ vers f, on peut trouver un entier N_2 tel que pour tout $n > N_2$ on ait

$$\sup_{z \in \overline{\Delta(c, \delta)}} |f_n(z) - f(z)| < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Posons $w_n = f_n(c_n)$. Alors w_n est une valeur critique de f_n, et pour $n > \max(N_1, N_2)$ on a

$$\begin{aligned} |w_n - w| &= |f_n(c_n) - f(c)| \\ &\leq |f_n(c_n) - f(c_n)| + |f(c_n) - f(c)| \\ &\leq \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

On a donc $\lim_{n\to\infty} w_n = w$.

Supposons maintenant que w est une valeur asymptotique finie de f, et que l'assertion est fausse. La négation du résultat implique qu'on peut trouver un nombre $r > 0$, et une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ tels que le disque fermé $\overline{\Delta(w, r)}$ ne contienne aucune valeur singulière de f_{n_k} pour tout k.

Puisque w est une valeur asymptotique de f, alors il existe une courbe Γ qui s'étend à l'infini et suivant laquelle f tend vers w. On peut même supposer que $f(\Gamma) \subset \Delta(w, r/2)$.

Soit $\{p_l\}$ une suite de points de Γ tels que $p_l \to \infty$ lorsque $l \to \infty$, et soit $q_l = f(p_l) \in \Delta(w, r/2)$.

Posons $q_{l,n_k} = f_{n_k}(p_l)$, pour tous les entiers l et k.

Soit j un entier fixé. Pour tout $l = 1, 2, \ldots, j$, on pose

$$\delta_l = \frac{1}{2} d(q_l, \partial\Delta(w, r/2))$$

et pour $2 \leq l \leq j$, on pose

$$r_l = |p_l - p_{l-1}|.$$

Notons par $\Gamma_{|p_{l-1}\sim p_l}$ la portion de la courbe Γ comprise entre les points p_{l-1} et p_l. L'adhérence $\overline{\Gamma_{|p_{l-1}\sim p_l}}$ de cet ensemble est compacte, et la suite $\{f_{n_k}\}$ converge localement uniformément vers f, donc il existe un entier N_l tel que pour tout $k > N_l$, on ait

$$\sup_{z\in\overline{\Gamma_{|p_{l-1}\sim p_l}}} |f_{n_k}(z) - f(z)| < \delta_l,$$

en particulier on a $f_{n_k}(p_l) = q_{l,n_k} \in \Delta(q_l, \delta_l)$.

Soit $z \in \Gamma_{|p_{l-1}\sim p_l}$, et soit $k > N_l$. Alors on a

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(z) - w| &\leq |f_{n_k}(z) - f(z)| + |f(z) - w| \\ &< \delta_l + |f(z) - w| \\ &< r/2 + r/2 \\ &= r. \end{aligned}$$

On en déduit donc que $f_{n_k}(\Gamma_{|p_{l-1}\sim p_l}) \subset \Delta(w, r)$ pour tout $k > N_l$.

Si $J = \max(N_1, N_2, \ldots, N_j)$, alors pour tout $k > J$ et tout $l = 1, 2, \ldots, j$, on a $f_{n_k}(\Gamma_{|p_{l-1}\sim p_l}) \subset \Delta(w, r)$, et en prenant leur union, on obtient aussi que $f_{n_k}(\Gamma_{|p_1\sim p_j}) \subset \Delta(w, r)$.

Choisissons un entier $k(j)$ tel que $n_{k(j)} > J$, comme on vient de voir, on a

$$f_{n_{k(j)}}(\Gamma_{|p_1\sim p_j}) \subset \Delta(w,r).$$

On note par ϕ_j la branche holomorphe de $f^{-1}_{n_{k(j)}}$ qui applique $f_{n_{k(j)}}(\Gamma_{|p_1\sim p_j})$ sur $(\Gamma_{|p_1\sim p_j})$. Comme $\Delta(w,r)$ est simplement connexe et ne contient aucune valeur singulière de $f_{n_{k(j)}}$, alors on peut appliquer le théorème de monodromie pour prolonger ϕ_j analytiquement à ce disque. On obtient ainsi une suite $\{\phi_j, j \in \mathbb{N}\}$ de fonctions holomorphes sur $\Delta(w,r)$. Soient z_1 et z_2 deux points distincts dans $\mathbb{C}$ tels que

$$\{f(z_1), f(z_2)\} \cap \overline{\Delta(w,r)} = \emptyset.$$

Alors z_1 et z_2 sont deux valeurs omises par ϕ_j à partir d'un certain rang de j, car sinon, il y aura une infinité d'entiers j tels que les fonctions ϕ_j atteignent z_1 et z_2, et dans ce cas, pour ces valeurs de j, on aura $f_{n_{k(j)}}(z_i) \in \Delta(w,r)$ pour $i = 1, 2$. Par la convergence localement uniforme, on aura pour $i = 1, 2$,

$$\lim_{j\to\infty} f_{n_{k(j)}}(z_i) = f(z_i),$$

ce qui contredit le fait que $f(z_i) \notin \overline{\Delta(w,r)}$. Donc à partir d'un certain rang j_0, la famille de fonctions $\{\phi_j, j > j_0\}$ omet les valeurs $\{z_1, z_2, \infty\}$. Par le théorème de Montel, $\{\phi_j, j \geq 1\}$ est normale. Il existe donc une sous-suite $\{\phi_{j_k} : k \in \mathbb{N}\}$ qui converge localement uniformément vers une certaine fonction ϕ, et que nous désignons encore par $\{\phi_j, j \geq 1\}$ pour alléger les notations. Par définition même des fonctions ϕ_j, nous avons

$$\left(f_{n_{k(j)}} \circ \phi_j\right)(\xi) = \xi, \quad \text{pour tout } \xi \in \Delta(w,r).$$

En passant à la limite lorsque j tend vers l'infini, nous aurons $(f \circ \phi)(\xi) = \xi$, pour tout $\xi \in \Delta(w,r)$. Nous en déduisons donc que ϕ est une fonction holomorphe et non constante sur $\Delta(w,r)$. De plus, elle vérifie $\phi(q_k) = p_k$. En prenant la limite quand k tend vers l'infini, nous aurons

$$\phi(w) = \lim_{k\to\infty} \phi(q_k) = \infty,$$

ce qui est contradictoire. $\diamond$

Chapitre 2

Dérivée schwarzienne et valeurs asymptotiques

La dérivée schwarzienne est un opérateur différentiel $S(f)$ qui s'applique à une fonction méromorphe, et qui est utilisé dans plusieurs branches de l'analyse complexe. C'est H. A. Schwarz lui-même qui y fut amené lorsqu'il recherchait un opérateur différentiel invariant par toute transformation de Möbius. Dans le présent chapitre, cet opérateur est utilisé pour caractériser les fonctions méromorphes d'ordre fini qui ont un nombre fini de valeurs asymptotiques, et qui n'ont pas de valeurs critiques.

2.1 La dérivée schwarzienne d'une fonction méromorphe

La dérivée schwarzienne a été utilisée dans plusieurs contextes différents, et chaque auteur qui en a fait usage, a évoqué certains de ses aspects, voir par exemple [12], [13] [14], [19]. Dans cette section, nous essayons de faire une petite synthèse sur cet opérateur.

2.1.1 Définition de la dérivée schwarzienne

Dans un premier lieu, on définit cette dérivée pour une fonction holomorphe dans un domaine de $\mathbb{C}$.

Définition 2.1 *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine D de $\mathbb{C}$, et telle que $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in D$. La* dérivée schwarzienne *de f, qu'on note $S(f)$, est définie* *par:*

$$S(f) = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$
$$= \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Si on suppose que f est une fonction holomorphe qui ne s'annule en aucun point d'un certain domaine D de $\mathbb{C}$, alors on peut aussi définir la dérivée schwarzienne de $1/f$ dans D, et on vérifie à l'aide d'un calcul direct, que cette dérivée satisfait à la relation:

$$S(1/f) = S(f).$$

Cette propriété permet de définir la dérivée schwarzienne d'une fonction méromorphe au voisinage d'un pôle simple. Il s'ensuit alors que si f est une fonction méromorphe et localement injective dans un domaine D, sa dérivée schwarzienne est partout définie et est holomorphe sur D.

2.1.2 La dérivée schwarzienne d'une transformation de Möbius

Une transformation de Möbius est une fonction rationnelle complexe de la forme

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

où $a, b, c,$ et d sont des nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$. Comme le montre la proposition suivante, les transformations de Möbius sont caractérisées par une dérivée schwarzienne nulle.

Proposition 2.1 *Une fonction méromorphe f est une transformation de Möbius si et seulement si $S(f) = 0$.*

Démonstration
Supposons que $S(f) = 0$, ce qui donne l'équation différentielle suivante:

$$\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = 0.$$

En posant $y = f''/f'$, l'équation devient:

$$y' - \frac{1}{2}y^2 = 0$$

qui admet comme solution $y = \frac{-2}{z+K_1}$, où K_1 est une constante. En revenant à la fonction f, on aura:

$$\frac{f''}{f'} = \frac{-2}{z+K_1},$$

ou encore

$$f'' = \frac{-2}{z+K_1} f'.$$

Le changement de variable $u = f'$ transforme l'équation précédente en

$$u' = \frac{-2}{z+K_1} u$$

dont la solution est $u = \frac{K_2}{(z+K_1)^2} = f'$. Ce qui entraîne que:

$$\begin{aligned} f(z) &= K_2 \int \frac{dz}{(z+K_1)^2} \\ &= -\frac{K_2}{z+K_1} + K_3 \\ &= \frac{-K_2 + K_3(z+K_1)}{z+K_1} \\ &= \frac{K_3 z + K_1 - K_2}{z+K_1}. \end{aligned}$$

Donc f est bien une transformation de Möbius.

Réciproquement, si on considère une transformation de Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, avec $ad - bc \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \\ f''(z) &= \frac{-2c(ad-bc)}{(cz+d)^3} \\ \frac{f''(z)}{f'(z)} &= -\frac{2c}{cz+d} \\ \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' &= \frac{2c^2}{(cz+d)^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$S(f)(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 = 0. \quad \diamond$$

2.1.3 La dérivée schwarzienne de la composée de deux fonctions méromorphes

Proposition 2.2 *Soient f et g deux fonctions méromorphes et localement injectives telles que $f \circ g$ soit définie dans un domaine D de $\mathbb{C}$. Alors on a*

$$S(f \circ g)(z) = [S(f)(g(z))]g'^2(z) + S(g)(z).$$

Démonstration

Il suffit d'effectuer les calculs:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(z) &= f'(g(z))g'(z). \\
(f \circ g)''(z) &= f''(g(z))(g'(z))^2 + f'(g(z))g''(z). \\
\frac{(f \circ g)''(z)}{(f \circ g)'(z)} &= \frac{(f'' \circ g)(z)}{(f' \circ g)(z)}g'(z) + \frac{g''(z)}{g'(z)}. \\
\left(\frac{(f \circ g)''(z)}{(f \circ g)'(z)}\right)' &= \left(\frac{(f'' \circ g)(z)}{(f' \circ g)(z)}g'(z)\right)' + \left(\frac{g''}{g'}\right)'(z) \\
&= \left(\left(\frac{f''}{f'}\right)(g(z))g'(z)\right)' + \left(\frac{g''}{g'}\right)'(z) \\
&= \left(\frac{f''}{f'}\right)'(g(z))g'^2(z) + \left(\frac{f''}{f'}\right)(g(z))g''(z) + \left(\frac{g''}{g'}\right)'(z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(f \circ g)(z) &= \left(\frac{f''}{f'}\right)'(g(z))g'^2(z) + \left(\frac{f''}{f'}\right)(g(z))g''(z) + \left(\frac{g''}{g'}\right)'(z) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{f''}{f'}\right)(g(z))g'(z) + \left(\frac{g''}{g'}\right)(z)\right)^2 \\
&= \left(\left(\frac{f''}{f'}\right)'(g(z)) - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2(g(z))\right)g'^2(z) + \left(\frac{g''}{g'}\right)'(z) - \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2(z) \\
&= [S(f)(g(z))]g'^2(z) + S(g)(z). \quad \diamond
\end{aligned}$$

Corollaire 2.1 *La dérivée schwarzienne d'une fonction méromorphe et localement injective sur un domaine D est invariante par toute composition avec une transformation de Möbius.*

Démonstration

Si g est une transformation de Möbius, alors pour toute fonction f méromorphe et localement injective sur un domaine de $\mathbb{C}$, on a:

$$\begin{aligned} S(g \circ f)(z) &= \underbrace{S(g)(f(z))}_{=0} f'^2(z) + S(f)(z) \\ &= S(f)(z). \quad \diamond \end{aligned}$$

En appliquant la formule qu'on vient d'établir pour la dérivée schwarzienne de la composée de deux fonctions méromorphes et localement injectives, on peut étendre la définition de cette dérivée au point à l'infini. On considère donc une fonction f méromorphe et localement injective dans un domaine contenant le point ∞, et on pose $\phi(z) = (f \circ g)(z)$ où g est la transformation de Möbius définie par $g(z) = 1/z$. Alors on a, pour tout $z \neq 0$

$$S(\phi)(z) = S(f)(1/z).\frac{1}{z^4}$$

et par suite

$$S(f)(1/z) = z^4 S(\phi)(z).$$

En faisant tendre z vers 0, on obtient:

$$S(f)(\infty) = \lim_{z \to 0} z^4 S(\phi)(z).$$

On conclut donc que la fonction $S(f)$ est holomorphe au point ∞, et admet un zéro d'ordre ≥ 4 en ce point.

2.1.4 L'équation différentielle $S(f) = \phi$

On se propose maintenant d'étudier l'équation différentielle $S(f) = \phi$. Le cas particulier de cette équation, où la fonction ϕ est égale à un polynôme est d'une grande importance dans l'étude du rapport entre la dérivée schwarzienne d'une fonction méromorphe et l'ensemble des valeurs asymptotiques de cette fonction.

Théorème 2.1 [19, page 53]
Soit ϕ une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $D \subset \mathbb{C}$. Alors il existe une fonction f méromorphe et localement injective sur D telle que $S(f) = \phi$. De plus, cette solution est unique à une transformation de Möbius près dans le sens que toute autre solution de cette équation est de la forme $g \circ f$, où g est une transformation de Möbius.

Démonstration

On considère l'équation différentielle:

$$S(f) = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = \phi. \tag{2.1}$$

On pose $w = (f')^{-1/2}$, et avec ce changement de variable, on obtient que

$$f' = \frac{1}{w^2}, \quad f'' = \frac{-2w'}{w^3}, \quad \text{et} \quad \frac{f''}{f'} = \frac{-2w'}{w}$$

ce qui transforme l'équation (2.1) en une équation linéaire du second ordre:

$$w'' + \frac{1}{2}\phi w = 0. \tag{2.2}$$

Etant donnés $z_0 \in D$ un point fixé, et $w_0 \in \mathbb{C}$, l'équation (2.2) admet une solution holomorphe w dans un voisinage de z_0 telle que $w(z_0) = w_0$. Comme D est simplement connexe, on peut prolonger cette solution analytiquement en une solution globale définie sur D (par le théorème de monodromie).

Soient maintenant w_1 et w_2 deux solutions de l'équation (2.2), holomorphes et linéairement indépendantes, définies sur D. Elles satisfont à la relation

$$w_1''w_2 - w_1w_2'' = 0.$$

En écrivant cette relation comme suit

$$w_1''w_2 - w_1w_2'' = (w_1'w_2 - w_1w_2')' = 0,$$

on déduit que $w_1'w_2 - w_1w_2' = c$, où c est une constante non nulle car elle est égale au wronskien de w_1 et w_2 qui sont linéairement indépendantes.

Posons $f = w_1/w_2$. Alors f est une fonction méromorphe et localement injective car $f' = c/w_2^2 \neq 0$ sur D. De plus, elle vérifie

$$\frac{f''}{f'} = -2\frac{w_2'}{w_2}$$

et par suite c'est une solution de l'équation (2.1).

Puisque la dérivée schwarzienne est invariante par les transformations de Möbius, alors si f est une solution de l'équation (2.1) et g est une transformation de Möbius, $g \circ f$ en est aussi une solution.

Réciproquement, si f et h sont deux solutions méromorphes et localement injectives de (2.1) sur D, on peut définir localement $h \circ f^{-1}$ et calculer sa dérivée schwarzienne:

$$\begin{aligned} S(h \circ f^{-1})(z) &= S(h)(f^{-1}(z)) \left(f^{-1}\right)'^{2}(z) + S(f^{-1})(z) \\ &= \phi\left(f^{-1}(z)\right) \left(f^{-1}\right)'^{2}(z) + S(f^{-1})(z) \\ &= S(f)(f^{-1}(z)) \left(f^{-1}\right)'^{2}(z) + S(f^{-1})(z) \\ &= S(f \circ f^{-1})(z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'après la proposition (2.1), on a $h \circ f^{-1} = g$ où g est une transformation de Möbius, et par suite $h = g \circ f$ comme voulu. $\diamond$

La démonstration de ce théorème a permis de faire ressortir la relation importante qui existe entre les solutions de l'équation (2.1) et celles de (2.2). Une fonction méromorphe est une solution de l'équation (2.1) si et seulement si elle est égale au quotient de deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.2).

Remarque 2.1 L'équation différentielle $S(f) = \phi$ est d'ordre 3, donc sa solution générale doit contenir trois constantes d'intégration. On peut obtenir une telle solution à partir de deux solutions linéairement indépendantes w_1 et w_2 de l'équation (2.2). Pour cela, on considère quatre constantes arbitraires a, b, c et d telles que $ad - bc = 1$, à partir desquelles on forme deux solutions linéairement indépendantes de (2.2):

$$aw_1 + bw_2 \quad \text{et} \quad cw_1 + dw_2 \, .$$

et la fonction

$$\begin{aligned} f &= \frac{aw_1 + bw_2}{cw_1 + dw_2} \\ &= \frac{a(w_1/w_2) + b}{c(w_1/w_2) + d} \end{aligned}$$

est une solution de l'équation (2.1), avec trois constantes d'intégration. (On utilise ici le fait que la dérivée schwarzienne est invariante par les transformations de Möbius).

2.2 Caractérisation de Nevanlinna des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un ensemble fini de valeurs asymptotiques

Les fonctions méromorphes qui admettent un ensemble fini de valeurs asymptotiques et qui n'ont pas de valeurs critiques, ont été caractérisées par R. Nevanlinna [23] à l'aide de leur dérivée schwarzienne. Dans cette section, nous présentons les idées principales de l'étude concernant ce sujet, et dont l'aboutissement a été le théorème qui suit:

Théorème 2.2 *Soit f une fonction méromorphe d'ordre fini. Alors la fonction f n'a pas de points critiques, et possède p valeurs asymptotiques comptées avec leur multiplicité, où $p \geq 2$, si et seulement si la dérivée schwarzienne de f est un polynôme de degré $p-2$.*

On considère d'abord l'équation différentielle

$$S(f)(z) = P(z) \tag{2.3}$$

où $P(z)$ est un polynôme de degré $p-2$, avec p un entier ≥ 2. D'après la section précédente, toute solution de cette équation est le quotient de deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle linéaire de degré 2 qui lui est associée, et qui est

$$w''(z) + Q(z)w(z) = 0 \tag{2.4}$$

où $Q(z) = \frac{1}{2}P(z)$. L'équation (2.4) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients des polynômes, donc ses solutions sont des fonctions entières (voir [14]), alors que celles de l'équation (2.3) sont des fonctions méromorphes.

On étudie l'équation (2.4) en suivant la méthode d'intégration asymptotique développée par E. Hille, voir [13, section 7.4], ou bien [14, section 5.6].

La première étape de cette méthode consiste à faire un changement de variables à l'aide des transformations de Liouville suivantes:

$$\begin{cases} \zeta = \int^z Q(t)^{\frac{1}{2}} dt \\ g(\zeta) = Q(z)^{\frac{1}{4}} w(z) \end{cases}$$

qui sont deux fonctions multiformes. On commence alors par déterminer adéquatement une branche pour la fonction $\zeta(z)$, et on examine les images de certains demi-plans par la fonction inverse $z(\zeta)$:

En multipliant la variable z par une constante appropriée, on peut supposer que le polynôme $Q(z)$ de degré $p-2$ est sous la forme:

$$Q(z) = -\frac{p^2}{4}z^{p-2} + c_{p-3}z^{p-3} + \cdots + c_0.$$

Soit ρ_0 un nombre positif tel que tous les zéros de $Q(z)$ sont contenus dans le disque $\Delta(0, \rho_0)$. Pour la fonction multiforme $Q(z)^{1/2}$, on choisit la branche qui vérifie ce qui suit: si on la divise par $\frac{ip}{2}z^{\frac{p}{2}-1}$ et si on la restreint aux z réels tels que $z^{\frac{p}{2}-1} > 0$, alors elle tend vers 1 lorsque z tend vers l'infini. On prolonge analytiquement cette branche à l'ensemble E, considéré comme une surface de Riemann définie par

$$\begin{cases} |z| \geq \rho_0 \\ |\arg z| < \theta_0, \end{cases}$$

où θ_0 est un nombre positif arbitraire. Avec ce choix, on obtient que $\zeta \sim iz^{p/2}$ lorsque $z \to \infty$ dans E.

La fonction inverse $z(\zeta)$ transforme l'ensemble A_ν défini par

$$\begin{cases} |\zeta| \geq r_0 \\ \nu\pi \leq \arg\zeta \leq (\nu+1)\pi, \end{cases}$$

où r_0 est un nombre positif et $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, en un sous-ensemble du plan z délimité par l'image du cercle $|\zeta| = r_0$, et les deux courbes L_ν et $L_{\nu+1}$ qui sont les images des deux côtés de A_ν, et qui s'éloignent à l'infini asymptotiquement dans un angle arbitrairement petit autour des rayons $\arg z = (\nu - \frac{1}{2})\frac{2\pi}{p}$ et $\arg z = (\nu + \frac{1}{2})\frac{2\pi}{p}$.

On est maintenant en mesure de poursuivre cette étape en exprimant l'équation (2.4) en fonction des nouvelles variables. Une première dérivation donne:

$$\frac{dg(\zeta)}{d\zeta}.\frac{d\zeta}{dz} = \frac{d}{dz}\left(Q(z)^{\frac{1}{4}}w(z)\right).$$

En calculant les deux membres, on obtient

$$Q(z)^{\frac{1}{2}}\frac{dg(\zeta)}{d\zeta} = \frac{1}{4}Q'(z)Q(z)^{-\frac{3}{4}}w(z) + Q(z)^{\frac{1}{4}}w'(z).$$

En multipliant par $Q(z)^{-\frac{1}{2}}$, on aura

$$\frac{dg(\zeta)}{d\zeta} = \frac{1}{4}Q'(z)Q(z)^{-\frac{5}{4}}w(z) + Q(z)^{-\frac{1}{4}}w'(z).$$

En dérivant une deuxième fois, on aura

$$\frac{d^2g(\zeta)}{d\zeta^2}\cdot\frac{d\zeta}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{4}Q'(z)Q(z)^{-\frac{5}{4}}w(z) + Q(z)^{-\frac{1}{4}}w'(z)\right)$$

ou

$$\begin{aligned} Q(z)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2g(\zeta)}{d\zeta^2} &= \frac{1}{4}Q''(z)Q(z)^{-\frac{5}{4}}w(z) - \frac{5}{16}(Q'(z))^2Q(z)^{-\frac{9}{4}}w(z) \\ &+ \frac{1}{4}Q'(z)Q(z)^{-\frac{5}{4}}w'(z) - \frac{1}{4}Q'(z)Q(z)^{-\frac{5}{4}}w'(z) + Q(z)^{-\frac{1}{4}}w''(z). \end{aligned}$$

En remplaçant $w''(z)$ par $-Q(z)w(z)$, et $Q(z)^{\frac{1}{4}}w(z)$ par $g(\zeta)$, l'équation devient

$$\begin{aligned} Q(z)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2g(\zeta)}{d\zeta^2} &= \frac{1}{4}Q''(z)Q(z)^{-\frac{3}{2}}g(\zeta) - \frac{5}{16}(Q'(z))^2Q(z)^{-\frac{5}{2}}g(\zeta) \\ &\quad -Q(z)^{\frac{1}{2}}g(\zeta) \end{aligned}$$

ou

$$\frac{d^2g(\zeta)}{d\zeta^2} = \frac{Q''(z)}{4(Q(z))^2}g(\zeta) - \frac{5(Q'(z))^2}{16(Q(z))^3}g(\zeta) - g(\zeta)$$

ou encore

$$\frac{d^2g(\zeta)}{d\zeta^2} + \left(1 - \frac{4Q(z)Q''(z) - 5(Q'(z))^2}{16(Q(z))^3}\right)g(\zeta) = 0.$$

Posons

$$F(\zeta) = \frac{4Q(z)Q''(z) - 5(Q'(z))^2}{16(Q(z))^3}.$$

Cette fonction F satisfait aux hypothèses posées par E. Hille (voir [13, page 330], ou bien [14, page 180]), et l'équation (2.4) prend alors la forme générale des équations qu'il a étudiées dans ses deux livres, soit

$$g''(\zeta) + (1 - F(\zeta))g(\zeta) = 0. \tag{2.5}$$

La seconde étape de la méthode d'intégration asymptotique consiste à comparer le comportement asymptotique des solutions de l'équation (2.5) avec celui des solutions de l'équation sinusoïdale $g''(\zeta) + g(\zeta) = 0$; soit les fonctions de la forme $\alpha e^{i\zeta} + \beta e^{-i\zeta}$, où α et β sont deux constantes complexes. Dans cette étape, on se place dans la surface de Riemann de la fonction log .

Dans son article [23], R. Nevanlinna a étudié l'équation (2.4) en suivant la même méthode que E. Hille, avec plus d'insistance sur les relations asymptotiques entre les solutions, ce qui lui a permis de dégager la caractérisation qu'il recherchait. Nous présentons les résultats de son analyse sous forme d'un théorème.

Théorème 2.3 *Soit l'équation différentielle* $w''(z) + Q(z)w(z) = 0$, *où* $Q(z)$ *est un polynôme de degré* $p - 2$, *avec* $p \geq 2$. *Alors l'équation* $g''(\zeta) + (1 - F(\zeta))g(\zeta) = 0$ *obtenue par transformation de Liouville de l'équation initiale, possède les propriétés asymptotiques suivantes:*

1) Pour tout entier ν *tel que* $|\nu| \leq p/2$, *l'équation admet une solution* $g_{2\nu}$ *telle que*

$$g_{2\nu}(\zeta) = e^{i\zeta}\left(1 + O(1/\zeta)\right),$$

quand $\zeta \to \infty$ *sur chaque demi-droite* $\arg\zeta = \omega$ *du domaine*

$$(2\nu - 1)\pi < \omega < (2\nu + 2)\pi.$$

2) Pour tout entier ν *tel que* $|\nu| \leq p/2$, *l'équation admet une solution* $g_{2\nu-1}$ *telle que*

$$g_{2\nu-1}(\zeta) = e^{-i\zeta}\left(1 + O(1/\zeta)\right),$$

quand $\zeta \to \infty$ *sur chaque demi-droite* $\arg\zeta = \omega$ *du domaine*

$$(2\nu - 2)\pi < \omega < (2\nu + 1)\pi.$$

On obtient ainsi p solutions $g_\nu, \nu = 0, 1, \ldots, p-1$ de l'équation (2.5) qui satisfont aussi à la propriété suivante:

Pour tout $\epsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver un nombre $r_\epsilon > 0$ tel que la fonction g_ν ne s'annule pas dans le domaine

$$\begin{cases} |\zeta| \geq r_\epsilon \\ (\nu - 1)\pi + \epsilon < \arg\zeta < (\nu + 2)\pi - \epsilon. \end{cases}$$

De plus, deux solutions successives g_ν et $g_{\nu+1}$, avec la convention que $g_p = g_0$, sont toujours linéairement indépendantes. Enfin, si g est une autre solution de la même équation, différente des g_ν, et linéairement indépendante de g_ν et de $g_{\nu+1}$ pour un certain entier ν, alors $g(\zeta)$ est asymptotique à la fonction $C\sin(\zeta - \zeta_0)$ dans un certain domaine. Ici C est une constante non nulle et ζ_0 est une constante arbitraire. Ce dernier type de solution n'a pourtant pas beaucoup d'intérêt pour nous, parce que les fonctions $\sin(\zeta - \zeta_0)$ n'ont pas de valeurs asymptotiques.

On retourne ensuite à l'ancienne variable z pour interpréter ces résultats sur les solutions de l'équation (2.4) de départ. Il suffit alors d'exprimer les solutions $g_\nu(\zeta)$ et leurs ensembles de définition à l'aide de la variable z, pour obtenir des solutions $w_\nu(z)$ de l'équation (2.4).

Théorème 2.4 *Si $Q(z)$ est un polynôme de degré $p-2$, alors l'équation (2.4) possède p solutions spéciales $w_0, w_1, \ldots, w_{p-1}$, qui sont des fonctions entières vérifiant les propriétés suivantes:*
Pour chaque $\nu = 0, 1, \ldots, p-1$, la fonction w_ν possède dans le domaine angulaire

$$\left|\arg z - \frac{2\nu\pi}{p}\right| < \frac{3\pi}{p} - \epsilon, \;\; \epsilon > 0 \tag{2.6}$$

le développement asymptotique

$$\log w_\nu(z) \sim (-1)^{\nu+1} z^{p/2}.$$

La solution w_ν s'annule au plus en un nombre fini de points dans le domaine angulaire (2.6).
Pour $\nu = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ et avec la convention que $w_p = w_0$, les fonctions w_ν et $w_{\nu+1}$ sont linéairement indépendantes, mais w_k et w_j peuvent ne pas l'être si j est un indice différent de $k-1$ et de $k+1$.

En utilisant la relation asymptotique qui apparaît dans ce théorème, on obtient tout de suite que les solutions w_ν sont des fonctions entières d'ordre $p/2$. De plus, si on note par W_ν le secteur défini par

$$W_\nu = \left\{ z : \left|\arg z - \frac{2\nu\pi}{p}\right| < \frac{\pi}{p} \right\} \tag{2.7}$$

où $\nu = 0, 1, \ldots, p-1$ avec la convention que $W_p = W_0$, alors la fonction w_ν tend vers 0 lorsque z tend vers l'infini suivant toute demi-droite issue de l'origine et située dans W_ν, et elle tend vers l'infini dans les deux secteurs adjacents $W_{\nu-1}$ et $W_{\nu+1}$. En d'autres mots, cela signifie que dans le secteur W_ν, la fonction w_ν admet la valeur asymptotique égale à 0, et qu'elle admet la valeur asymptotique ∞ dans les deux secteurs $W_{\nu-1}$ et $W_{\nu+1}$.
On considère maintenant, parmi les p solutions spéciales de l'équation (2.4) données dans le théorème (2.4), un sous-ensemble de solutions spéciales fondamentales qu'on note par $w_{\nu_1}, \ldots, w_{\nu_q}, (2 \leq q \leq p)$, qui vérifie les propriétés suivantes:

1. Les fonctions w_{ν_i} et w_{ν_j} sont linéairement indépendantes pour tous indices $i \neq j$ tels que $1 \leq i, j \leq q$.

2. $\{w_{\nu_1}, \ldots, w_{\nu_q}\}$ est un sous-ensemble maximal de solutions vérifiant la propriété 1.

Soit μ_i le nombre de solutions w_ν qui sont linéairement dépendantes de w_{ν_i} pour $i = 1, \ldots, q$. On a alors $\mu_i \leq \frac{p}{2}$ et $\sum \mu_i = p$. D'autre part, on a le résultat suivant:

Théorème 2.5 *La solution w_{ν_i} $(i = 1, \ldots, q)$ possède dans μ_i secteurs angulaires de la forme W_ν, qu'on note par $W_i^k, k = 1, \ldots, \mu_i$, la valeur asymptotique nulle. Dans ces mêmes secteurs, les solutions qui sont linéairement indépendantes de w_{ν_i} admettent la valeur asymptotique infinie.*

On revient à l'équation (2.3), et on considère une solution f de cette équation. D'après la section précédente, pour tout $\nu = 0, 1, \ldots, p-1$, la fonction $\frac{w_\nu}{w_{\nu+1}}$ est une solution de l'équation (2.3) parce qu'elle est égale au quotient de deux solutions linéairement indépendants de l'équation (2.4). D'après le théorème (2.1), on peut trouver pour tout $\nu = 0, 1, \ldots, p-1$, une transformation de Möbius

$$G_\nu(z) = \frac{\alpha_\nu z + \beta_\nu}{\gamma_\nu z + \delta_\nu},$$

avec $\alpha_\nu \delta_\nu - \beta_\nu \gamma_\nu \neq 0$, telle que

$$\begin{aligned} f &= G_\nu \circ \frac{w_\nu}{w_{\nu+1}} \\ &= \frac{\alpha_\nu w_\nu + \beta_\nu w_{\nu+1}}{\gamma_\nu w_\nu + \delta_\nu w_{\nu+1}}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi une valeur asymptotique de la fonction f dans le secteur W_ν, qui est égale à $\frac{\beta_\nu}{\delta_\nu}$. Comme la fonction w_ν admet la valeur asymptotique nulle dans les μ_i secteurs W_i^k donnés par le théorème précédent, et que $w_{\nu+1}$ est linéairement indépendante de w_ν, alors on peut énoncer le résultat suivant:

Corollaire 2.2 *La fonction méromorphe $f(z)$ possède la valeur asymptotique a_i égale à $\frac{\beta_\nu}{\delta_\nu}$ dans chaque secteur $W_i^k, k = 1, \ldots, \mu_i$. Ces valeurs asymptotiques sont distinctes, et en les comptant avec leur multiplicité, leur nombre est exactement $\sum \mu_i = p$.*

Remarque 2.2 Les valeurs asymptotiques $\frac{\beta_\nu}{\delta_\nu}$ obtenues dans ce corollaire peuvent être infinies. Cependant, dans [23], R. Nevanlinna ne considère que les solutions f de l'équation (2.3) qui sont quotient de ce qu'il a appelé des solutions normales de l'équation (2.4) parce qu'elles sont linéairement indépendantes des q solutions spéciales fondamentales $w_{\nu_1}, \ldots, w_{\nu_q}$ de cette même équation. Il impose ainsi la condition supplémentaire que les constantes α_ν, β_ν, γ_ν, et δ_ν sont toutes non nulles, pour tout $\nu = 0, \ldots, p-1$, et il obtient alors que toutes les valeurs asymptotiques de la fonction méromorphe f sont finies et distinctes.

Nous pouvons enfin récapituler ce qui nous intéresse du travail de Nevanlinna réalisé dans son article [23, section 9], en énonçant la caractérisation suivante:

Théorème 2.6 *Soit f est une fonction méromorphe dont la dérivée schwarzienne est un polynôme de degré $p-2$ avec $p \geq 2$. Alors f est une fonction d'ordre fini égal à $p/2$, elle n'a pas de points critiques, et elle possède p valeurs asymptotiques comptées avec leur multiplicité. De plus, le plan complexe est réparti en p secteurs angulaires de même angle, et à l'intérieur de chacun d'eux, la fonction f converge vers l'une de ses p valeurs asymptotiques suivant toute demi-droite contenue dans ce secteur.*

Exemple 2.1 On prend le cas le plus simple où la dérivée schwarzienne est une constante non nulle, par exemple $S(f) = 2$. L'équation linéaire de degré 2 qui lui est associée, $w'' + w = 0$, admet les deux solutions e^{iz} et e^{-iz}, et donc on a $f(z) = \frac{\alpha e^{iz} + \beta e^{-iz}}{\gamma e^{iz} + \delta e^{-iz}}$, où α, β, γ, et δ sont des constantes complexes telles que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.
Pour $\alpha = \delta = 1$ et $\beta = \gamma = 0$, on obtient que $f(z) = e^{2iz}$ est une fonction entière, et l'ensemble de ses valeurs asymptotiques est $\{0, \infty\}$.
Pour $\alpha = 1$, $\beta = -1$, et $\delta = \gamma = i$, $f(z)$ est égale à la fonction $\tan z$, c'est une fonction méromorphe et l'ensemble de ses valeurs asymptotiques est $\{i, -i\}$.

La réciproque du théorème (2.6) s'obtient aisément à l'aide de la théorie de Nevanlinna, voir par exemple [11] ou [9] où elle a été utilisée. Pour l'établir, on aura besoin d'un résultat connu sous le nom de théorème de la dérivée logarithmique. Mais avant d'énoncer ce théorème, faisons quelques rappels sur la fonction caractéristique $T(r, f)$ d'une fonction méromorphe introduite à la section (1.2.2). La proposition qui suit contient quelques propriétés de $T(r, f)$:

Proposition 2.3 *Soient $f, f_1, \cdots, f_n$ des fonctions méromorphes et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des nombres complexes tels que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Alors*
(a) $T\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i)$ *pour* $r \geq 1$
(b) $T(r, f^n) = nT(r, f)$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$
(c) $T\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \log n + \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i)$ *pour* $r \geq 1$
(d) $T\left(r, \dfrac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta}\right) = T(r, f) + O(1)$, *quand* $r \longrightarrow \infty$, *en supposant que* $f \not\equiv -\delta/\gamma$.

Les inégalités et les égalités qui apparaissent dans cette proposition restent valides si on remplace la fonction $T(r, f)$ par $m(r, f)$ qui a été définie aussi à la section (1.2.2).

On passe ensuite à une propriété qui caractérise les fonctions rationnelles par la grandeur de leur fonction caractéristique, et qu'on énonce dans le théorème ci-dessous:

Théorème 2.7 *Soit f une fonction méromorphe. Alors f est une fonction rationnelle si et seulement si*

$$T(r, f) = O(\log r) \quad \textit{quand} \quad r \longrightarrow \infty.$$

On peut en effet trouver les deux implications de ce théorème respectivement aux pages 171 et 220 de [21], ou bien 16 et 40 de [22].

Voici maintenant le théorème de la dérivée logarithmique $\frac{f'}{f}$ d'une fonction méromorphe f:

Théorème 2.8 [21, page 245]
La dérivée logarithmique d'une fonction méromorphe non constante

$$f(z) = c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + \cdots \quad (c_k \neq 0)$$

satisfait à l'inégalité

$$m(r, \frac{f'}{f}) < 12 + 3\log^+ \left|\frac{1}{c_k}\right| + 4\log r + 8\log T(r, f)$$

pour $r > 1$, $T(r) > e$ sauf pour un ensemble de valeurs de r de mesure finie.

Ce théorème contient en fait plus d'information qu'il nous est nécessaire, il suffit pour nous d'en retenir que si f est d'ordre fini, alors on a:

$$m(r, \frac{f'}{f}) = O(\log r). \tag{2.8}$$

Revenons à la réciproque du théorème (2.6), et considérons une fonction méromorphe f d'ordre fini et qui n'a pas de points critiques. On obtient déjà, de la proposition (1.1), que f a un nombre fini de valeurs asymptotiques. De plus, la dérivée f' de f ne s'annule en aucun point, et par suite, sa dérivée schwarzienne $S(f)$ est une fonction entière. La fonction caractéristique de Nevanlinna de $S(f)$ se réduit donc à la quantité $m(r, S(f))$ à cause de l'absence de pôles pour $S(f)$:

$$T(r, S(f)) = m(r, S(f)).$$

Notons que, si f est une fonction méromorphe d'ordre fini, alors f' l'est aussi: cela découle de la propriété (a) de la proposition (2.3) et du théorème de la dérivée logarithmique. En utilisant la proposition (2.3) et la relation (2.8), on aura

$$\begin{aligned}
T(r, S(f)) &= m(r, S(f)) \\
&= m\left(r, \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right) \\
&\leq \log 2 + m\left(r, \frac{f'''}{f'}\right) + m\left(r, \left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right) \\
&= \log 2 + m\left(r, \frac{f'''}{f''}\frac{f''}{f'}\right) + 2m\left(r, \frac{f''}{f'}\right) \\
&\leq \log 2 + m\left(r, \frac{f'''}{f''}\right) + 3m\left(r, \frac{f''}{f'}\right) \\
&\leq O(\log r).
\end{aligned}$$

D'après le théorème (2.7), $S(f)$ est une fonction rationnelle, mais comme elle est entière, alors elle est égale à un polynôme dont le degré est, d'après la première partie de cette section, égal au nombre de valeurs asymptotiques de f comptées avec leur multiplicité moins 2. Ceci complète la caractérisation de Nevanlinna selon laquelle les fonctions méromorphes d'ordre fini qui n'ont pas de points critiques et qui ont un nombre fini de valeurs asymptotiques sont exactement celles dont la dérivée schwarzienne est un polynôme.

2.3 Extension de la caractérisation de Nevanlinna à une famille holomorphe de fonctions entières

Considérons maintenant une famille de fonctions entières d'ordre fini $\{f_\lambda : \lambda \in D\}$ qui dépend d'une manière holomorphe de λ variant dans un domaine D de $\mathbb{C}$. Donc la fonction f à deux variables, définie par $f(\lambda, z) = f_\lambda(z)$ est holomorphe sur $D \times \mathbb{C}$. En utilisant la caractérisation de Nevanlinna donnée dans la section précédente, on obtient le résultat qui suit:

Théorème 2.9 *Soit $\{f_\lambda : \lambda \in D\}$ une famille de fonctions entières qui dépend d'une manière holomorphe de λ variant dans un domaine D de $\mathbb{C}$. Si pour tout $\lambda \in D$, la fonction f_λ est d'ordre fini, a un nombre fini de valeurs asymptotiques et n'a pas de* *points critiques, alors il existe un entier $p \geq 2$ et un ensemble discret $E \subset D$ tels que f_λ a exactement p valeurs asymptotiques comptées avec leur multiplicité, pour tout $\lambda \in D \setminus E$, et pour $\lambda \in E$, f_λ a moins de p valeurs asymptotiques.*

Démonstration

Pour tout $\lambda \in D$. f_λ est une fonction entière qui n'a pas de points critiques, donc d'après la proposition (1.4), le nombre de valeurs asymptotiques de f_λ est supérieur ou égal à 2.

Pour chaque λ, notons par p_λ le nombre de valeurs asymptotiques de f_λ comptées avec leur multiplicité. Il existe alors, d'après la section précédente, un polynôme $Q_\lambda(z)$ de degré $p_\lambda - 2$ tel que

$$S(f_\lambda)(z) = Q_\lambda(z),$$

où $S(f_\lambda)$ désigne la dérivée schwarizienne de la fonction f_λ. D'une part il est clair que $S(f_\lambda)(z)$ est une fonction entière de z. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} S(f_\lambda)(z) &= \left(\frac{f''_\lambda}{f'_\lambda}\right)'(z) - \frac{1}{2}\left(\frac{f''_\lambda}{f'_\lambda}\right)^2(z) \\ &= \frac{f'''_\lambda(z)}{f'_\lambda(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''_\lambda(z)}{f'_\lambda(z)}\right)^2. \end{aligned}$$

et comme $f(\lambda, z) = f_\lambda(z)$ est holomorphe en λ et en z, et que $f'_\lambda(z) \neq 0$ pour tout $(\lambda, z) \in D \times \mathbb{C}$, alors $S(f_\lambda)(z)$ est aussi holomorphe en λ.

Soit $\lambda_0 \in D$, et soit $r > 0$ tel que la boule fermée $X = \overline{B(\lambda_0, r)}$ soit contenue dans D. Ecrivons le développement de Taylor de $S(f_\lambda)(z)$ au voisinage de $(\lambda_0, 0)$:

$$S(f_\lambda)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda) z^k$$

où les $a_k(\lambda)$ sont des fonctions holomorphes de λ sur un ouvert contenant X.

Pour chaque $n \geq 0$, posons

$$E_n = \{\lambda \in X : a_k(\lambda) = 0, \text{ pour tout } k > n\}.$$

La famille $\{E_n, n \geq 0\}$ est une suite croissante de sous-ensembles de X. De plus ils sont non vides à partir d'un certain rang. En effet, pour $\lambda = \lambda_0$, on a $S(f_{\lambda_0})(z) = Q_{\lambda_0}(z)$ est un polynôme de degré $n_0 = p_{\lambda_0} - 2$, donc $\lambda_0 \in E_n$ pour tout $n \geq n_0$.

Pour chaque $k > n$, $a_k(\lambda)$ est une fonction holomorphe, et l'ensemble de ses zéros dans X, noté par $Z_k = \{\lambda \in X : a_k(\lambda) = 0\}$, est ou bien égal à X si a_k est identiquement nulle, ou bien il est constitué de points isolés, donc il est toujours fermé. Comme on a

$$E_n = \bigcap_{k>n} Z_k,$$

alors E_n est lui-même ou bien égal à X, ou bien il est constitué de points isolés, et par conséquent il est fermé dans X.

Pour chaque $\lambda \in X$, $S(f_\lambda)(z) = Q_\lambda(z)$ est un polynôme de degré $p_\lambda - 2$, donc $\lambda \in E_{p_\lambda - 2}$, et par suite on a

$$X = \bigcup_{n \geq 0} E_n.$$

Supposons pour l'instant que pour tout n, E_n n'est pas égal à X tout entier, et considérons la famille des ouverts $X \setminus E_n$. On a d'abord

$$\bigcap_{n \geq 0} (X \setminus E_n) = \emptyset.$$

Ensuite, pour chaque $n \geq 0$, E_n ne contient que des points isolés, donc $X \setminus E_n$ est dense dans X. Par le théorème de Baire, on a $\bigcap_{n \geq 0} (X \setminus E_n) \neq \emptyset$, et cette contradiction montre que $E_n = X$ pour un n.

Soit p le plus petit entier tel que $E_p = X$. On a alors

$$S(f_\lambda)(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k(\lambda) z^k,$$

où $a_p(\lambda)$ est une fonction holomorphe de λ, non identiquement nulle. Donc $S(f_\lambda)$ est un polynôme de degré p, pour tout $\lambda \in X$ qui n'est pas un zéro de $a_p(\lambda)$.

On considère maintenant deux points quelconques λ et λ' appartenant à D. Comme D est un domaine de $\mathbb{C}$, alors on peut joindre ces deux points par un arc contenu dans D. Par la suite, on construit une suite finie de n boules fermées $\overline{B(\lambda_i, r_i)} \subset D$ et centrées sur cet arc, telles que $\lambda_1 = \lambda$ et $\lambda_n = \lambda'$ et pour tout $i = 1, 2, \ldots, n-1$ on ait $B(\lambda_i, r_i) \bigcap B(\lambda_{i+1}, r_{i+1}) \neq \emptyset$. Pour chacune des boules $\overline{B(\lambda_i, r_i)}$, il existe un entier p_i tel que $S(f_\lambda)$ est un polynôme de degré p_i pour tout λ appartenant à cette boule, sauf peut-être un nombre fini. Puisque $B(\lambda_i, r_i) \bigcap B(\lambda_{i+1}, r_{i+1}) \neq \emptyset$, on a nécessairement $p_i = p_{i+1}$, et on en déduit qu'il existe un même entier p tel que $\deg S(f_\lambda) = \deg S(f_{\lambda'}) = p$.

On conclut donc que pour tout $\lambda \in D$, la fonction $S(f_\lambda)$ est un polynôme de degré p, sauf pour un sous-ensemble discret constitué par les zéros de $a_p(\lambda)$, et pour lesquelles $S(f_\lambda)$ est un polynôme de degré $< p$. $\diamond$

Exemple 2.2 La famille de fonctions entières $f_\lambda(z) = \int_0^z e^{-\lambda t^p} dt$.

Dans son livre [21. pages 168], R. Nevanlinna a évoqué l'exemple qu'il trouve instructif, de la fonction entière

$$w(z) = \int_0^z e^{-t^p} dt$$

où p est un entier ≥ 1. Il a indiqué qu'en considérant les $2p$ secteurs suivants:

$$\left|\arg z - \frac{\nu\pi}{p}\right| < \frac{\pi}{2p} - \epsilon\,,$$

où $\nu = 0, 1, \cdots, 2p-1$. et $\epsilon > 0$ assez petit. on obtient que dans chaque secteur correspondant à une valeur paire de ν, la fonction $w(z)$ possède une seule valeur asymptotique finie. donnée par

$$a_\mu = e^{\frac{2\mu\pi i}{p}} \int_0^\infty e^{-r^p} dr\,. \quad (\mu = \frac{\nu}{2} = 0, 1, \cdots, p-1). \tag{2.9}$$

Par contre. si ν est impair. la fonction $w(z)$ tend vers la valeur asymptotique infinie $a_p = \infty$, qui est alors de multiplicité p.

On considère maintenant la famille de fonctions

$$f_\lambda(z) = \int_0^z e^{-\lambda t^p} dt\,.$$

où $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. et p est un entier fixé ≥ 1. Pour $\lambda = 1$. la fonction f_1 est la fonction $w(z)$ de l'exemple de Nevanlinna, et possède l'ensemble des valeurs asymptotiques suivant

$$A(1) = \{\infty\} \bigcup \{a_\mu = e^{\frac{2\mu\pi i}{p}} \int_0^\infty e^{-t^p} dt\,,\ \mu = \frac{\nu}{2} = 0, 1, \cdots, p-1\}.$$

Pour $\lambda \neq 1$.

$$\begin{aligned} f_\lambda(z) &= \int_0^z e^{-\lambda t^p} dt \\ &= \int_0^z e^{-(\lambda^{1/p} t)^p} dt. \end{aligned}$$

On se fixe une racine de $\lambda^{1/p}$. et on pose $u = \lambda^{1/p} t$. Alors $du = \lambda^{1/p} dt$. et

$$\begin{aligned} f_\lambda(z) &= \int_0^{\lambda^{1/p} z} e^{-u^p} \lambda^{-1/p} du \\ &= \lambda^{-1/p} \int_0^{\lambda^{1/p} z} e^{-u^p} du. \end{aligned}$$

On retrouve ici l'intégrale qui, d'après l'équation (2.9), converge vers la valeur a_μ si $\left|\arg(\lambda^{1/p}z) - \frac{\nu\pi}{p}\right| < \frac{\pi}{2p} - \epsilon$ et ν pair, et diverge vers l'infini à l'intérieur des secteurs correspondant à ν impair.
On conclut donc que pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a

$$A(\lambda) = \{\infty\} \bigcup \{a_{\lambda,\mu} = \lambda^{-1/p} e^{\frac{2i\mu\pi}{p}} \int_0^\infty e^{-r^p} dr, \mu = 0, 1, \cdots, p-1\}.$$

Ici encore, la valeur asymptotique $a_{\lambda,p} = \infty$ est de multiplicité p. L'ensemble $A(\lambda)$ ne dépend pas de la racine choisie pour $\lambda^{1/p}$.

On calcule maintenant la dérivée schwarzienne de f_λ pour $\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned}
f_\lambda(z) &= \int_0^z e^{-\lambda t^p} dt \\
f_\lambda'(z) &= e^{-\lambda z^p} \\
f_\lambda''(z) &= -p\lambda z^{p-1} e^{-\lambda z^p} \\
f_\lambda'''(z) &= -p\lambda \left((p-1)z^{p-2} + z^{p-1}(-p\lambda z^{p-1})\right) e^{-\lambda z^p} \\
&= -p\lambda \left((p-1)z^{p-2} - p\lambda z^{2p-2})\right) e^{-\lambda z^p}. \\
S(f_\lambda)(z) &= \frac{f_\lambda'''(z)}{f_\lambda'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f_\lambda''(z)}{f_\lambda'(z)}\right)^2 \\
&= -p\lambda \left((p-1)z^{p-2} - p\lambda z^{2p-2})\right) - \frac{3}{2}\left(-p\lambda z^{p-1}\right)^2 \\
&= -p(p-1)\lambda z^{p-2} + p^2\lambda^2 z^{2(p-1)}) - \frac{3}{2}p^2\lambda^2 z^{2(p-1)} \\
&= -p(p-1)\lambda z^{p-2} - \frac{1}{2}p^2\lambda^2 z^{2(p-1)} \\
&= Q_\lambda(z).
\end{aligned}$$

Donc on trouve bien que la dérivée schwarzienne de chaque fonction f_λ est égale à un polynôme Q_λ de degré $2p-2$, et le point $\lambda = 0$ en lequel ceci est en défaut est un zéro du coefficient $a_{2p-2}(\lambda) = -\frac{1}{2}p^2\lambda^2$.

2.4 Expression générale des fonctions satisfaisant à la caractérisation de Nevanlinna

En exploitant les propriétés que possèdent les fonctions étudiées par R. Nevanlinna, d'être d'ordre fini et dépourvues de points critiques, on peut les écrire toutes sous une même forme de même nature que l'exemple (2.2) cité à la section précédente. Nous aurons besoin pour cela du lemme suivant rapporté de [20, lemme 2 §43]:

Lemme 2.1 *Si la partie réelle $u(r,\theta)$ d'une fonction entière $f(z)$ satisfait à une inégalité de la forme:*

$$u(r,\theta) \leq r^{\mu}, \qquad (\mu > 0)$$

pour tout r suffisament grand, alors $f(z)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $[\mu]$, où $[\mu]$ désigne la partie entière de μ.

Proposition 2.4 *Soit f une fonction entière d'ordre fini égal à $p > 0$ et qui n'a pas de points critiques. Alors p est un entier, et il existe un polynôme T de degré p tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait*

$$f(z) = f(z_0) + \int_{z_0}^{z} e^{T(\zeta)} d\zeta ,$$

où z_0 est un point choisi arbitrairement.

Démonstration

Puisque la fonction f n'a pas de points critiques, alors sa dérivée f' est une fonction entière qui ne s'annule en aucun point de $\mathbb{C}$, et qui, par suite, peut s'écrire sous la forme $f'(z) = \exp(T(z))$, où $T(z)$ est une fonction entière. On sait aussi que les deux fonctions f et f' sont de même ordre (voir par exemple [31, page 17]). On a donc

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log(\log M(r,f'))}{\log r} = p.$$

On en déduit que pour tout $\epsilon > 0$ et pour r assez grand, l'égalité $M(r,f') \leq \exp(r^{p+\epsilon})$ a lieu. Mais on a:

$$\begin{aligned} M(r,f') &= \max_{|z|=r} |f'(z)| \\ &= \max_{|z|=r} (\exp(\Re T(z))). \end{aligned}$$

ce qui donne, pour r assez grand et pour tout z tel que $|z| = r$:

$$\Re T(z) \leq |z|^{p+\epsilon}.$$

Cette inégalité suffit, d'après le lemme (2.1), pour conclure que $T(z)$ est un polynôme de degré $\leq p+\epsilon$. Comme ϵ est arbitraire, alors $T(z)$ est un polynôme de degré $\leq p$. On sait d'autre part que l'ordre de $f'(z) = \exp(T(z))$ est égal à $\deg(T)$, donc $\deg(T) = p$. Par le théorème fondamental du calcul intégral, on obtient que

$$f(z) = f(z_0) + \int_{z_0}^{z} f'(\zeta)d\zeta = f(z_0) + \int_{z_0}^{z} e^{T(\zeta)}d\zeta,$$

ce qui complète la démonstration. $\diamond$

Si on considère une famille $\{f_\lambda : \lambda \in D\}$ de fonctions entières satisfaisant aux conditions du théorème (2.9), alors on obtient que pour tout $\lambda \in D$, la fonction f_λ s'exprime de la manière suivante:

$$f_\lambda(z) = f_\lambda(z_0) + \int_{z_0}^{z} e^{T_\lambda(\zeta)}d\zeta\ , \tag{2.10}$$

où $T_\lambda(z)$ est un polynôme en z de degré égal à l'ordre de f_λ (qui est égal à p presque partout sur D). Donc

$$T_\lambda(z) = b_p(\lambda)z^p + b_{p-1}(\lambda)z^{p-1} + \cdots + b_0(\lambda).$$

On sait aussi que la dérivée schwarzienne de f_λ est un polynôme en z,

$$Q_\lambda(z) = a_{2p-2}(\lambda)z^{2p-2} + a_{2p-3}(\lambda)z^{2p-3} + \cdots + a_0(\lambda),$$

de degré $2p-2$, et à coefficients des fonctions holomorphes de λ. En calculant cette dérivée schwarzienne à partir de l'expression (2.10) de f_λ, on obtient un polynôme de degré $2p-2$ en z dont les coefficients sont des produits et des sommes des fonctions $b_j(\lambda)$:

$$\begin{aligned} S(f_\lambda)(z) &= T''_\lambda(z) - \frac{1}{2}\left(T'_\lambda(z)\right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{p-2}(p-k)(p-k-1)b_{p-k}(\lambda)z^{p-k-2} \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{p-1}(p-k)(p-j)b_{p-k}(\lambda)b_{p-j}(\lambda)z^{2p-(k+j)-2}. \end{aligned}$$

En considérant les termes de cette somme correspondant à $0 \leq k+j \leq p-1$, et en faisant l'analogie avec le polynôme $Q_\lambda(z)$, on obtient le système:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}p^2b_p^2 = a_{2p-2} \\ -p(p-1)b_pb_{p-1} = a_{2p-3} \\ -\frac{1}{2}(p-1)^2b_{p-1}^2 - p(p-2)b_pb_{p-2} = a_{2p-4} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p-2}(2+k)(p-k)b_{2+k}b_{p-k} = a_p \\ -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p-1}(1+k)(p-k)b_{1+k}b_{p-k} = a_{p-1}. \end{cases}$$

Au voisinage de n'importe quel point où a_{2p-2} est non nulle, on peut choisir une branche de la fonction $\sqrt{a_{2p-2}}$, et on trouve que $b_p(\lambda)$ est une fonction holomorphe, et que les $b_j(\lambda)$, pour $j = 1, \ldots, p-1$, sont des fonctions méromorphes sur D moins l'ensemble des zéros de a_{2p-2}, dont les pôles éventuels sont les zéros de $b_p(\lambda)$.
Les termes de la somme précédente correspondant aux puissances de z inférieures à $p-2$, donnent le système:

$$\begin{cases} 2b_2 - \frac{1}{2}b_1^2 = a_0 \\ 6b_3 - b_1 b_2 = a_1 \\ 12b_4 - 3b_1 b_3 - 2b_2^2 = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p-1)(p-2)b_{p-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{p-1}(p-k)(k-1)b_{p-k}b_{k-1} = a_{p-3} \\ p(p-1)b_p - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}(p-k)kb_{p-k}b_k = a_{p-2}. \end{cases}$$

On constate donc, d'après ces relations, que si la fonction $b_1(\lambda)$ n'admet pas de pôles dans D, toutes les autres fonctions $b_j(\lambda)$ auront la même propriété.
Puisque les fonctions $f_\lambda(z)$ n'ont pas de points critiques, alors $f'_\lambda(z) = \exp(T_\lambda(z))$ est non nulle pour tout $(\lambda, z) \in D \times \mathbb{C}$. En particulier, pour $z = 0$, on a $f'_\lambda(0) = \exp(b_0(\lambda))$ est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur D.
En passant à la dérivée seconde de f_λ par rapport à z évaluée au point 0, on aura que

$$f''_\lambda(0) = b_1(\lambda)e^{b_0(\lambda)},$$

est une fonction holomorphe sur D. Comme $\exp(b_0(\lambda))$ ne s'annule jamais, alors $b_1(\lambda)$ est aussi holomorphe sur D. D'où la proposition:

Proposition 2.5 *Soit $\{f_\lambda : \lambda \in D\}$ une famille de fonctions entières satisfaisant aux conditions du théorème (2.9). Alors au voisinage de tout point de $D \setminus E$, il existe un polynôme T_λ de degré égal à l'ordre de f_λ et à coefficients des fonctions holomorphes de λ sur ce voisinage, tel que*

$$f_\lambda(z) = f_\lambda(z_0) + \int_{z_0}^{z} e^{T_\lambda(\zeta)}d\zeta.$$

Chapitre 3

Valeurs asymptotiques et multifonctions

Dans ce chapitre, nous présentons une multifonction analytique finie, construite à partir des valeurs asymptotiques associées aux éléments d'une famille de fonctions entières $\{f_\lambda : \lambda \in D\}$, qui dépend d'une manière holomorphe de $\lambda \in D$, où D est un domaine de $\mathbb{C}$. Dans un premier lieu, nous établissons la semi-continuité de cette multifonction dans $D \setminus E$, où E est un sous-ensemble discret de D, ensuite nous montrons qu'elle est analytique dans un sous-ensemble ouvert et dense dans D.

3.1 Rappels sur les multifonctions

La présente section contient une brève introduction aux multifonctions. On y trouve d'abord la définition des multifonctions analytiques, puis la proposition qui donne l'analyticité d'une multifonction qui admet des sélections holomorphes locales.

3.1.1 Multifonctions et semi-continuité

Définition 3.1 *Soient X et Y deux espaces topologiques séparés, et $\mathcal{K}(Y)$ l'ensemble des compacts non vides de Y. Une* multifonction *est une application $K : X \longrightarrow \mathcal{K}(Y)$.*

Notations 3.1 Si $C \subset X$ et $D \subset Y$, on a les notations suivantes:

$$K(C) = \cup\{K(x) : x \in C\}$$

$$K^{-1}(D) = \{x \in X : K(x) \subset D\}$$

$$Gr(K) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in K(x)\}, \text{ le graphe de } K$$

et enfin

$$K_{|C}, \text{ la restriction de } K \text{ à } C.$$

La semi-continuité supérieure ou inférieure d'une multifonction est définie par:

Définition 3.2 *Soit* $K : X \longrightarrow \mathcal{K}(Y)$ *une multifonction, on dit que*
(a) K *est semi-continue supérieurement (s.c.s.) si pour tout ouvert* U *de* Y, $K^{-1}(U)$ *est un ouvert de* X,
(b) K *est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si pour tout fermé* F *de* Y, $K^{-1}(F)$ *est un fermé de* X,
(c) K *est continue si elle est à la fois s.c.s. et s.c.i..*

Si une multifonction K est *s.c.s.*, alors elle envoie tout compact de X sur un compact de Y, et son graphe est un fermé de $X \times Y$. De plus, si l'un au moins des deux espaces X ou Y est localement compact, alors K est *s.c.s.* si et seulement si son graphe est fermé dans $X \times Y$.

3.1.2 Distance de Hausdorff entre deux ensembles compacts

Si la topologie de Y est donnée par une métrique d, alors on peut l'utiliser pour définir une métrique Δ sur $\mathcal{K}(Y)$, qu'on appellera la distance de Hausdorff sur $\mathcal{K}(Y)$. Donnés K et $L \in \mathcal{K}(Y)$, leur distance de Hausdorff est définie par :

$$\Delta(K, L) = \inf\{\delta > 0 : K \subset B_\delta(L) \text{ et } L \subset B_\delta(K)\},$$

où $B_\delta(K) = \{y \in Y : \text{dist}(y, K) < \delta\}$.
Cette distance peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\Delta(K, L) = \max\{\sup_{z \in K} d(z, L), \sup_{z \in L} d(z, K)\}.$$

La notion de continuité d'une multifonction K définie plus haut, est équivalente à la continuité de K par rapport à la distance de Hausdorff.

3.1.3 Multifonctions analytiques

Dans l'étude des valeurs asymptotiques des fonctions entières, on utilisera uniquement des multifonctions d'une seule variable complexe et à valeurs dans $\mathcal{K}(\mathbb{C})$, c'est pour cela qu'on se limitera à présenter ce type de multifonctions.

Dans un premier lieu, on donne la définition d'une fonction plurisousharmonique, qui sera utilisée pour définir les multifonctions analytiques.

Définition 3.3 *Une fonction ψ, définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite* plurisousharmonique *si elle est s.c.s., et si sa restriction à chaque droite complexe de Ω est sous-harmonique. Cela signifie que, pour tous α et $\beta \in \mathbb{C}^n$, la fonction*

$$z \longmapsto \psi(z\alpha + \beta)$$

est sous-harmonique sur $\{z : z\alpha + \beta \in \Omega\}$.

Voici maintenant la définition d'une multifonction analytique sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ telle qu'elle a été donnée dans les références classiques pour cette théorie, comme [1, 2, 26].

Définition 3.4 *Soit $K : \Omega \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C})$ une multifonction. On dit que K est analytique sur Ω si elle vérifie les deux propriétés suivantes:*

(a) K est s.c.s. sur Ω.

(b) pour tout ouvert V de Ω, et toute fonction Φ plurisousharmonique sur un voisinage ouvert de $Gr(K_{|V})$, la fonction $\psi : V \longrightarrow [-\infty, \infty)$ définie par:

$$\psi(\lambda) = \sup\{\Phi(\lambda, z) : z \in K(\lambda)\}$$

est sous-harmonique sur V.

3.1.4 Sélections holomorphes locales

La définition d'une multifonction analytique donnée à la section précédente est souvent utilisée pour établir des propriétés de ces multifonctions. Mais la complexité avec laquelle elle est formulée nous amène généralement, dans la pratique, à la remplacer par d'autres versions équivalentes et plus faciles à manipuler. C'est ainsi que la notion de sélections holomorphes locales a été introduite pour montrer que certaines multifonctions sont analytiques.

Définition 3.5 *Soit $K : \Omega \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C})$ une multifonction s.c.s.. On dit que K possède des sélections holomorphes locales si pour tout $\lambda_0 \in \Omega$ et tout $z_0 \in \partial K(\lambda_0)$, il existe un voisinage ouvert N de λ_0 dans Ω, et une fonction holomorphe $h : N \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que:*

$$h(\lambda_0) = z_0, \quad et \quad h(\lambda) \in K(\lambda) \;\; pour\ tout\ \lambda \in N.$$

Les sélections holomorphes locales fournissent un critère pour reconnaître une multifonction analytique comme le précise la proposition suivante:

Proposition 3.1 *Soit $K : \Omega \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C})$ une multifonction s.c.s.. Si K possède des sélections holomorphes locales, alors elle est analytique.*

Voici quelques exemples de multifonctions analytiques admettant des sélections holomorphes locales:

Exemples 3.1 1.

$$\begin{array}{rccc} K: & D & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mathbb{C}) \\ & \lambda & \longmapsto & \{h(\lambda)\} \end{array}$$

où h est une fonction holomorphe de $D \subset \mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

2.

$$\begin{array}{rccc} K: & D & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mathbb{C}) \\ & \lambda & \longmapsto & \lambda K_0 + K_1 \end{array}$$

où K_0 et K_1 sont deux sous-ensembles compacts de $\mathbb{C}$.

3.2 Multifonctions et valeurs asymptotiques

Le but de cette section est d'étudier la multifonction obtenue, à partir d'une famille de fonctions entières $\{f_\lambda : \lambda \in D\}$ qui dépend d'une manière holomorphe de λ, en faisant correspondre à tout $\lambda \in D$ l'ensemble des valeurs asymptotiques finies de f_λ. Nous pouvons voir des exemples simples où cette multifonction est analytique:

Exemples 3.2 1. $f_\lambda(z) = e^z + \lambda$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rccc} K: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mathbb{C}) \\ & \lambda & \longmapsto & K(\lambda) = \{\lambda\} \end{array}$$

est une multifonction analytique dans $\mathbb{C}$.

2. $f_\lambda(z) = e^{z^2 - \lambda z}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

f_λ possède les valeurs asymptotiques doubles 0 et ∞, et la valeur critique $e^{-\lambda^2/4}$, image du point critique $z = \lambda/2$.

$$\begin{array}{rccc} K: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mathbb{C}) \\ & \lambda & \longmapsto & K(\lambda) = \{0\} \end{array}$$

est une multifonction constante, donc elle est analytique dans $\mathbb{C}$.

Nous remarquons que dans ce dernier exemple, la multifonction constituée des valeurs singulières de f_λ est également analytique.

Nous avons cependant imposé des conditions supplémentaires aux fonctions f_λ, éléments des familles considérées, de manière à satisfaire aux hypothèses de la caractérisation de Nevanlinna donnée à la section (2.2).
Mais avant d'étudier la dite multifonction, nous donnons une précision qui découle de la caractérisation de Nevanlinna dans le cas d'une fonction entière, ainsi que certains résultats qui nous seront utiles par la suite.

Lemme 3.1 *Soit f une fonction entière d'ordre fini sans points critiques et qui possède un nombre fini de valeurs asymptotiques comptées avec leur multiplicité. Alors la multiplicité de la valeur asymptotique infinie est égale au nombre des valeurs asymptotiques finies comptées avec leur multiplicité.*

Démonstration

Notons par $a_1, a_2, \ldots, a_p$ toutes les valeurs asymptotiques de f, en incluant la valeur asymptotique infinie, et en répétant celles qui sont multiples. D'après la section (2.2), le plan complexe est réparti en p secteurs $W_1, W_2, \ldots, W_p$ de même angle tels que f admet la valeur asymptotique a_j dans le secteur W_j.
Soient a_j et a_k deux valeurs asymptotiques finies et distinctes de f, même si elles peuvent être égales en valeur, et soient Γ_j et Γ_k deux chemins asymptotiques de déterminations respectives a_j et a_k et contenus respectivement dans les secteurs W_j et W_k. Les chemins Γ_j et Γ_k sont donc non contigus. En utilisant un théorème de Phragmén et Lindelöf (voir [30, §5.64]), on obtient que les deux courbes Γ_j et Γ_k sont séparées par une courbe infinie suivant laquelle la fonction f tend vers la valeur asymptotique infinie, et par suite, les deux secteurs W_j et W_k sont obligatoirement séparés par un secteur W_l où la fonction f admet la valeur asymptotique infinie, d'où le résultat. $\diamond$

Remarque 3.1 Ce résultat n'est pas propre aux fonctions entières dont la dérivée schwarzienne est un polynôme, mais on le retrouve aussi dans le cas d'une fonction entière d'ordre fini plus générale, exprimé à l'aide des chemins asymptotiques non contigus associés à des valeurs asymptotiques, (voir par exemple [5, théorème 17]).

Nous aurons besoin aussi, pour démontrer le théorème principal de cette section, de savoir comment varient les p secteurs correspondant à une fonction f_λ lorsque λ varie dans un petit voisinage. Pour faire ceci, nous allons examiner l'effet des transformations introduites à la section (2.2), sur les solutions des équations différentielles

$$S(f_\lambda)(z) = P_\lambda(z), \quad \text{et} \quad w''(z) + Q_\lambda(z)w(z) = 0,$$

où P_λ est un polynôme en z de degré $p-2$ et $Q_\lambda = \frac{1}{2}P_\lambda$.
Posons

$$P_\lambda(z) = a_{p-2}(\lambda)z^{p-2} + a_{p-3}(\lambda)z^{p-3} + \cdots + a_0(\lambda),$$

où les $a_k(\lambda)$ sont des fonctions holomorphes, avec $a_{p-2}(\lambda)$ non identiquement nulle.
Pour ramener le polynôme $Q_\lambda(z)$ à la forme

$$Q_\lambda(z) = -\frac{p^2}{4}z^{p-2} + c_{p-3}(\lambda)z^{p-3} + \cdots + c_0(\lambda),$$

sous laquelle il a été utilisé dans la section (2.2), on doit multiplier la variable z par une fonction $c(\lambda)$ satisfaisant à la relation:

$$\frac{a_{p-2}(\lambda)}{2(c(\lambda))^{p-2}} = -\frac{p^2}{4}.$$

Donc

$$c(\lambda) = \left[-\frac{2}{p^2}a_{p-2}(\lambda)\right]^{\frac{1}{p-2}}.$$

Soit λ_0 un point fixé de D tel que $a_{p-2}(\lambda_0) \neq 0$. On peut alors trouver un nombre strictement positif δ tel que pour tout $\lambda \in \Delta(\lambda_0, \delta)$, f_λ admet p valeurs asymptotiques, et le plan complexe comporte p secteurs équidistants et de même angle $\frac{\pi}{p}$ correspondant aux p valeurs asymptotiques finies de f_λ. Choisissons maintenant une branche pour la fonction $c(\lambda)$. Lorsque λ varie dans un petit voisinage de λ_0, la transformation $\zeta = c(\lambda)z$ fait subir une rotation d'angle $(\arg c(\lambda) - \arg c(\lambda_0))$ aux p secteurs correspondant à f_{λ_0} pour obtenir les p secteurs correspondant à f_λ.
Pour avoir une intersection non vide entre les secteurs de f_λ et ceux de f_{λ_0}, il suffit de choisir le nombre δ assez petit de manière qu'on ait par exemple

$$|\arg\ c(\lambda) - \arg\ c(\lambda_0)| < \frac{\pi}{3p},$$

pour tout λ tel que $|\lambda - \lambda_0| < \delta$. Nous pouvons donc énoncer le lemme suivant:

Lemme 3.2 *Soit $\{f_\lambda : \lambda \in D\}$ une famille de fonctions entières qui dépend d'une manière holomorphe de λ variant dans un domaine D de $\mathbf{C}$. On suppose que pour tout $\lambda \in D$, la fonction f_λ est d'ordre fini, a exactement p valeurs asymptotiques et n'a* *pas de points critiques. Soit λ_0 un point fixé de D. Alors il existe $\delta > 0$ et p secteurs de même angle $\theta < \frac{\pi}{p}$, tels que pour tout $\lambda \in \Delta(\lambda_0, \delta)$, la fonction f_λ converge vers l'une de ses p valeurs asymptotiques suivant toute demi-droite contenue dans ce secteur.*

Voici un autre théorème dont nous aurons besoin aussi,

Théorème 3.1 (Théorème d'Osgood, [28])
Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions holomorphes sur un domaine D de $\mathbb{C}$ qui converge simplement vers une fonction f sur D. Alors $\{f_n\}$ converge localement uniformément vers f sur un sous-ensemble ouvert et dense de D.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le théorème suivant:

Théorème 3.2 *Soit $\{f_\lambda : \lambda \in D\}$ une famille de fonctions entières qui dépend d'une manière holomorphe de λ variant dans un domaine D de $\mathbb{C}$. On suppose que pour tout $\lambda \in D$, la fonction f_λ est d'ordre fini, a un nombre fini de valeurs asymptotiques et n'a pas de points critiques. Alors il existe un sous-ensemble U de D, ouvert et dense dans D, tel que l'application K définie par*

$$\begin{array}{rccc} K: & U & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mathbb{C}) \\ & \lambda & \longmapsto & A(f_\lambda) \end{array}$$

où $A(f_\lambda)$ est l'ensemble de toutes les valeurs asymptotiques finies de f_λ, est une multifonction analytique finie.

Démonstration

D'après le théorème (2.9), il existe un entier q tel que pour tout $\lambda \in D$, la dérivée schwarzienne $S(f_\lambda)$ est un polynôme de degré q, sauf pour un sous-ensemble discret $E \subset D$ de valeurs de λ, pour lesquelles $\deg S(f_\lambda) < q$.

D'après le lemme (3.1), pour toute fonction f_λ telle que $\lambda \in D \setminus E$, la multiplicité de la valeur asymptotique infinie est égale au nombre des valeurs asymptotiques finies comptées avec leur multiplicité, et qu'on note par p. Le plan complexe est alors réparti en $2p = q$ secteurs de même angle, dans p secteurs d'entre eux, la fonction f_λ admet une des p valeurs asymptotiques finies, et lorsque l'une d'elles est multiple, alors f_λ tendra vers elle dans deux secteurs disjoints et non adjacents.

Pour $\lambda \in D \setminus E$, le cardinal de $A(f_\lambda)$ peut être strictement inférieur à p, mais dans la démonstration, on écrira toujours $K(\lambda) = \{a_1, \ldots, a_p\}$ en permettant que certaines valeurs a_j puissent coïncider.

1) Pour montrer que K est *s.c.s.*, il suffit de vérifier que son graphe est fermé dans $\tilde{D} \times \mathbb{C}$, où $\tilde{D} = D \setminus E$.

Soit (λ, w) un point de $\tilde{D} \times \mathbb{C}$ qui n'appartient pas à $Gr(K)$, donc $w \notin K(\lambda)$.

Ecrivons $K(\lambda) = \{a_1, \dots, a_p\}$. Alors on peut trouver un nombre $r > 0$ tel que $\Delta(a_j, r) \bigcap \Delta(w, r) = \emptyset$ pour tout $j = 1, 2, \dots, p$, et $\Delta(a_j, r) \bigcap \Delta(a_i, r) = \emptyset$ si $a_j \neq a_i$.

On montre par l'absurde que $(\lambda, w) \notin \overline{Gr(K)}$. Pour cela, on suppose que pour tous les nombres strictement positifs s et t tels que $\Delta(\lambda, s) \times \Delta(w, t) \subset \tilde{D} \times \mathbb{C}$, on a

$$\Delta(\lambda, s) \times \Delta(w, t) \bigcap Gr(K) \neq \emptyset.$$

En particulier, pour $s = 1/n$ avec $n \geq 1$ et $t = r$, on a

$$\Delta(\lambda, \frac{1}{n}) \times \Delta(w, r) \bigcap Gr(K) \neq \emptyset.$$

Donc, pour chaque $n \geq 1$, il existe $\lambda_n \in \Delta(\lambda, 1/n)$ tel que

$$K(\lambda_n) \bigcap \Delta(w, r) \neq \emptyset \ ,$$

c'est à dire que $\Delta(w, r)$ contient au moins une valeur asymptotique de f_{λ_n}.

Posons $f_n = f_{\lambda_n}$. En écrivant $f_n(z) - f_\lambda(z) = (\lambda_n - \lambda) g_\lambda(z)$ où g_λ est holomorphe, on voit que la suite $\{f_n\}$ converge localement uniformément vers f_λ. En appliquant le théorème de convergence des valeurs singulières et en tenant compte de l'absence de valeurs critiques, on obtient que pour chaque valeur asymptotique a_j de f_λ, il existe une suite $\{w_n^j\}$ de valeurs asymptotiques respectives des fonctions f_n telle que

$$\lim_{n \to \infty} w_n^j = a_j.$$

Si la situation d'une valeur asymptotique multiple a_j se présente, alors on considère deux secteurs disjoints W_j^1 et W_j^2 et deux chemins infinis Γ_j^1 et Γ_j^2 dans W_j^1 et W_j^2 respectivement, suivant lesquels f_λ tend vers a_j. Le même procédé qui a permis d'établir le théorème (1.7) sur la convergence des valeurs singulières montre que pour chaque secteur W_j^i avec $i = 1, 2$, il existe une suite $\{w_{i,n}^j\}$ de valeurs asymptotiques respectives des f_n qui converge vers a_j.

On déduit donc que pour n assez grand, chaque disque $\Delta(a_j, r)$ contient au moins une valeur asymptotique de f_n, et comme f_n admet au plus p valeurs asymptotiques, alors

$\Delta(w, r)$ ne peut en contenir d'autres, ce qui est contradictoire.

2) On montre maintenant que K est analytique sur un ouvert dense de D. Pour cela, on se propose de vérifier qu'elle admet des sélections holomorphes locales.

Soient $\lambda_0 \in \tilde{D}$, et $K(\lambda_0) = \{a_1, \dots, a_p\}$. On se donne un nombre $r > 0$ tel que $\Delta(a_j, r) \cap \Delta(a_i, r) = \emptyset$ si $j \neq i$, et on pose $V = \bigcup_{1 \leq j \leq p} \Delta(a_j, r)$, alors V est un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $K^{-1}(V) \neq \emptyset$ parce qu'il contient au moins λ_0. Comme K est *s.c.s.*, alors il existe $\delta > 0$ tel que $\Delta(\lambda_0, \delta) \subset \tilde{D}$ et $K(\lambda) \subset V$ pour tout $\lambda \in \Delta(\lambda_0, \delta)$.

Pour $a_j \in K(\lambda_0)$, on considère un chemin infini Γ_j tel que $\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \Gamma_j}} f_{\lambda_0}(z) = a_j$ et $f_{\lambda_0}(\Gamma_j) \subset \Delta(a_j, r)$. En choisissant convenablement ce chemin Γ_j selon le lemme (3.2), on peut trouver un nombre positif $\eta \leq \delta$ tel qu'on ait pour tout $\lambda \in \Delta(\lambda_0, \eta)$, $\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \Gamma_j}} f_\lambda(z) = a_\lambda$, où a_λ est une valeur asymptotique de f_λ contenue dans $\Delta(a_j, r)$.

On définit une fonction h par

$$\begin{array}{rccl} h: & \Delta(\lambda_0, \eta) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \lambda & \longrightarrow & h(\lambda) = \lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \Gamma_j}} f_\lambda(z). \end{array}$$

Pour tout $\lambda \in \Delta(\lambda_0, \eta)$, on a $h(\lambda) = a_\lambda$, une certaine valeur asymptotique de f_λ, ce qui montre que $h(\lambda) \in K(\lambda)$.

La fonction $h(\lambda)$ est continue sur $\Delta(\lambda_0, \eta)$. En effet, si on se donne un point $\lambda \in \Delta(\lambda_0, \eta)$, et une suite arbitraire $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ de points de $\Delta(\lambda_0, \eta)$ qui tend vers λ, on obtient que $h(\lambda_n)$ tend vers $h(\lambda)$ quand n tend vers l'infini de la manière suivante: $h(\lambda)$ est une valeur asymptotique de f_λ admettant la courbe Γ_j comme chemin asymptotique de détermination, et la suite de fonctions entières $\{f_{\lambda_n}\}_{n \geq 1}$ converge localement uniformément vers f_λ. D'après la démonstration du théorème de convergence des valeurs singulières, il existe une suite $\{w_n\}_{n \geq 1}$ telle que w_n tend vers $h(\lambda)$ lorsque n tend vers l'infini, et pour chaque n, w_n est une valeur asymptotique de f_{λ_n} de même chemin de détermination Γ_j que $h(\lambda)$. On a donc

$$w_n = \lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \Gamma_j}} f_{\lambda_n}(z) = h(\lambda_n).$$

Soit $\{z_n\}$ une suite infinie arbitraire de points de Γ_j telle que $|z_n| < |z_{n+1}|$, et $\lim_{n \to \infty} z_n = \infty$. Posons $h_n(\lambda) = f_\lambda(z_n)$. Alors la suite $\{h_n\}_{n \geq 1}$ est constituée de fonctions holomorphes sur $\Delta(\lambda_0, \eta)$ telles qu'on ait pour tout $\lambda \in \Delta(\lambda_0, \eta)$,

$$\lim_{n \to \infty} h_n(\lambda) = h(\lambda).$$

Donc d'après le théorème d'Osgood, il existe un ouvert $\Delta_{\lambda_0} \subset \Delta(\lambda_0, \eta)$, dense dans $\Delta(\lambda_0, \eta)$ tel que $\{h_n\}_{n\geq 1}$ converge localement uniformément vers h dans Δ_{λ_0}. On obtient donc que h est holomorphe sur Δ_{λ_0}.

En répétant le même procédé qui a permis de construire la fonction holomorphe h, on obtient pour tout $\lambda \in \tilde{D}$, un ouvert U_λ contenu et dense dans un certain disque $\Delta(\lambda, r_\lambda) \subset \tilde{D}$, et une fonction h_λ holomorphe sur U_λ et vérifiant $h_\lambda(\xi) \in K(\xi)$ pour tout $\xi \in U_\lambda$.

Posons

$$U = \bigcup_{\lambda \in \tilde{D}} U_\lambda.$$

Alors U est un ouvert dense dans D, et les fonctions:

$$h_\lambda : U_\lambda \longrightarrow \mathbb{C} ,$$

constituent des sélections holomorphes locales de K relativement à cet ouvert U. On conclut donc que K est une multifonction analytique sur U. $\diamond$

L'obstacle majeur rencontré dans la démonstration précédente, et qui empêche la multifonction K d'être analytique sur le domaine $\tilde{D}$, réside dans la difficulté de montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccl} h: & \Delta(\lambda_0, \eta) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \lambda & \longmapsto & h(\lambda) = \lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z\in\Gamma_j}} f_\lambda(z). \end{array}$$

est holomorphe sur le disque $\Delta(\lambda_0, \eta)$ tout entier. Des problèmes semblables se présentent par exemple lors de l'étude des solutions des équations différentielles dans le plan complexe. Dans des travaux anciens de P. Painlevé, et particulièrement dans sa thèse [25], on retrouve plusieurs tentatives de prolongement analytique d'une fonction à un ensemble de singularités. Pour cela, P. Painlevé a donné une classification en trois catégories de l'ensemble des points singuliers qu'il note par E, d'une fonction $f = P + iQ$ définie dans ce qu'il appelle "une aire fermée" σ. Voici donc la classification avec les termes utilisés par P. Painlevé lui-même dans [25]:

1. *"En premier lieu, si tous les points singuliers peuvent être enfermés à l'intérieur de cercles n'ayant pas de points communs et de rayon aussi petit qu'on veut, nous dirons que l'ensemble de ces points E est ponctuel."*

2. *"En second lieu, si tous les points ne satisfont pas à la condition précédente, mais peuvent être enfermés à l'intérieur de contours tels que l'aire totale enclose soit aussi petite qu'on veut, nous dirons que l'ensemble E est linéaire."*

3. *"En dernier lieu, il est possible que les points E soient distribués dans des aires finies $\sigma', \sigma'', \ldots$, c'est-à-dire qu'une portion de ces aires, si petite qu'elle soit, en renferme un nombre infini .... L'ensemble sera dit alors superficiel."*

Après cette classification, voici une citation tirée de la même thèse de P. Painlevé:
"Supposons tout d'abord que les points E ne forment pas dans σ un ensemble superficiel. Si, dans ce cas, la fonction $P + iQ$ est continue dans σ, il sera démontré plus tard en toute rigueur qu'elle est nécessairement holomorphe dans le même espace."
Malgré cette affirmation de la part de P. Painlevé, la démonstration rigoureuse de son assertion est donnée uniquement dans le cas où l'ensemble E est une ligne rectifiable au sens usuel du mot. Elle ne peut donc nous être utile pour prolonger analytiquement la fonction h à $\Delta(\lambda_0, \eta)$. A cause de ces difficultés, il serait peut-être préférable de montrer l'holomorphie de la fonction h par d'autres moyens. Nous avons essayé de le faire directement à l'aide du théorème de Moréra de la manière suivante:
La fonction $f(\lambda, z) = f_\lambda(z)$ est holomorphe sur $D \times \mathbb{C}$, donc en particulier elle est séparément holomorphe par rapport aux deux variables λ et z. On fixe z, et on considère une courbe fermée arbitraire C contenue dans $\Delta(\lambda_0, \eta)$. Comme la fonction f_λ est holomorphe sur $\Delta(\lambda_0, \eta)$, alors on a

$$\int_C f_\lambda(z) d\lambda = 0 .$$

D'autre part, on a

$$h(\lambda) = \lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \Gamma_j}} f_\lambda(z).$$

Si on parvenait à montrer que cette convergence est localement uniforme, cela permettrait d'avoir

$$\int_C h(\lambda) d\lambda = 0 ,$$

et la fonction h serait holomorphe sur $\Delta(\lambda_0, \eta)$.

Revenons au théorème 3.2, il assure donc que la multifonction K est analytique dans un ouvert dense de $\tilde{D}$, sans toutefois empêcher que cela ne se réalise dans $\tilde{D}$ tout entier. Nous reprenons l'exemple (2.2) du chapitre précédent, qui présente un cas où elle possède cette propriété dans $\tilde{D}$.

Exemple 3.1 On considère les fonctions entières

$$f_\lambda(z) = \int_0^z e^{-\lambda t^p} dt.$$

Pour ces fonctions, on a $\tilde{D} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, et

$$K(\lambda) = \{\lambda^{-1/p} e^{\frac{2i\mu\pi}{p}} \int_0^\infty e^{-r^p} dr, \mu = 0, 1, \cdots, p-1\}.$$

La multifonction K est analytique sur $\tilde{D}$.

3.3 Exemples de situations différentes

Considérons maintenant des familles de fonctions $\{f_\lambda : \lambda \in D\}$, plus générales que celles rencontrées plus-haut. Commençons par le cas le plus proche du précédent, où chaque f_λ est une fonction méromorphe satisfaisant aux conditions de la caractérisation de Nevanlinna. Nous savons qu'une telle fonction n'a pas de valeurs critiques, que sa dérivée schwarzienne est un polynôme P_λ, et qu'elle s'obtient par une composition d'une fonction entière g_λ, solution de la même équation différentielle $S(f) = P_\lambda$, avec une transformation de Möbius T_λ. De plus, si ρ désigne l'ordre de f_λ, alors ρ est un nombre entier et f_λ possède 2ρ valeurs asymptotiques, qui peuvent être calculées à partir de celles de g_λ en utilisant ce qui suit:

Soit $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière, et a une valeur asymptotique de g. Soit T une transformation de Möbius définie par:

$$T = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \text{avec} \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

On considère un chemin asymptotique de g, de détermination a, défini par une courbe continue ϕ:

$$\begin{array}{rccc} \phi : & [0, 1[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \phi(t) \end{array}$$

tel que $\lim_{t \to 1} \phi(t) = \infty$, et $\lim_{t \to 1} g(\phi(t)) = a$.

On pose $f = T \circ g$, alors f est une fonction méromorphe, et

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 1} f(\phi(t)) &= \lim_{t \to 1} T(g(\phi(t))) \\ &= T(a). \end{aligned}$$

$T(a)$ est donc une valeur asymptotique de f.

Voici quelques exemples de familles de fonctions méromorphes satisfaisant aux conditions de la caractérisation de Nevanlinna:

Exemple 3.2 1.

$$f_\lambda(z) = \lambda \frac{e^z - 1}{e^z + 1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

f_λ est une fonction méromorphe admettant une infinité de pôles simples aux points $z = i\pi(2k+1)$, avec $k \in \mathbf{Z}$.

$$T_\lambda(z) = \lambda \frac{z-1}{z+1}, \quad \text{et} \quad f_\lambda = T_\lambda(e^z).$$

L'ensemble des valeurs asymptotiques de f_λ est égal à $\{\lambda, -\lambda\}$, image de l'ensemble des valeurs asymptotiques $\{0, \infty\}$ de e^z par T_λ, et

$$\begin{array}{rccc} K: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mathbb{C}) \\ & \lambda & \longmapsto & \{\lambda, -\lambda\} \end{array}$$

est une multifonction analytique.

2.

$$f_\lambda(z) = \frac{1}{\lambda + e^{-z}}, \quad \lambda \neq 0.$$

Les fonctions f_λ admettent des pôles aux points z, solutions de l'équation $e^z = -\frac{1}{\lambda}$. En écrivant

$$f_\lambda(z) = \frac{e^z}{\lambda e^z + 1},$$

on aura que

$$f_\lambda = T_\lambda(e^z), \quad \text{où} \quad T_\lambda(z) = \frac{z}{\lambda z + 1}.$$

L'ensemble des valeurs asymptotiques de f_λ est $\{0, \frac{1}{\lambda}\}$, et

$$\begin{array}{rccc} K: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mathbb{C}^*) \\ & \lambda & \longmapsto & \{0, \frac{1}{\lambda}\} \end{array}$$

est une multifonction analytique.

3. $f_\lambda(z) = \lambda \tan z$, $\lambda \in \mathbb{C}$. On écrit:

$$\begin{aligned} \lambda \tan z &= \frac{\lambda}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \\ &= -\lambda i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}. \end{aligned}$$

En posant $g(z) = e^{2iz}$, et

$$T_\lambda = -\lambda i \frac{z-1}{z+1},$$

on aura que $\lambda \tan z = (T_\lambda \circ g)(z)$. L'ensemble des valeurs asymptotiques de g est $\{0, \infty\}$, et celui de $\lambda \tan z$ sera donc $\{i\lambda, -i\lambda\}$. La multifonction associée K

$$\begin{array}{rccc} K: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mathbb{C}) \\ & \lambda & \longmapsto & \{i\lambda, -i\lambda\} \end{array}$$

est analytique dans $\mathbb{C}$.

Nous pouvons construire d'autres exemples de familles de fonctions entières ou méromorphes d'ordre fini ≥ 1, dont la dérivée schwarzienne est une fonction rationnelle P/Q où P et Q sont deux polynômes tels que $\deg P - \deg Q \geq 1$, et pour lesquelles la multifonction en question est analytique. Nous savons que ces fonctions ont certaines analogies avec celles dont la dérivée schwarzienne est un polynôme, mais nous ne disposons pas d'une caractérisation qui les identifie complètement.

Exemple 3.3 La dérivée schwarzienne de la fonction $f(z) = \exp(z^3)$ est:

$$S(f)(z) = -\frac{8 + 9z^6}{2z^2}.$$

C'est une fraction rationnelle d'ordre 6. Elle admet un pôle de multiplicité 2, au point $z = 0$, qui est aussi un point critique de f. Les valeurs asymptotiques de f sont 0, et ∞, toutes les deux de multiplicité 3.

Nous construisons un exemple d'une multifonction analytique du même genre que les précédentes, en appliquant des transformations de Möbius à la fonction $f(z) = \exp(z^3)$.

Exemple 3.4 On considère la famille de fonctions:

$$f_\lambda(z) = \frac{\lambda + e^{z^3}}{e^{z^3} + 2},$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $z \in D$ tel que $\exp(z^3) + 2 \neq 0$. On a:

$$S(f_\lambda)(z) = S(f)(z) = -\frac{8 + 9z^6}{2z^2},$$

et l'ensemble des valeurs asymptotiques de f_λ est égal à $\{0, \frac{\lambda}{2}\}$. La multifonction K associée est analytique sur D.

Considérons maintenant des fonctions qui ne sont pas caractérisées par leur dérivée schwarzienne, mais qui restent d'ordre fini. Soient donc p un entier ≥ 1, et f la fonction entière définie par:

$$f(z) = \int_0^z \frac{\sin t^p}{t^p} dt ,$$

où l'intégrale est prise le long du rayon Oz.

f est une fonction d'ordre $2p$, qui admet $2p$ valeurs asymptotiques finies et distinctes. En effet, en posant $z = re^{i\theta}$, et $t = \rho e^{i\theta}$, où $\theta = \arg z$ est fixe et $0 \leq \rho \leq r$, nous aurons que:

$$f(re^{i\theta}) = \int_0^r \frac{\sin(\rho^p e^{ip\theta})}{\rho^p e^{i(p-1)\theta}} d\rho .$$

En prenant les rayons correspondant à $\theta = \frac{k\pi}{p}$, pour $k = 0, 1, \ldots, 2p-1$, et en calculant la limite lorsque r tend vers l'infini, nous obtenons les valeurs asymptotiques:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z=r\exp(i\frac{k\pi}{p})}} f(z) &= \int_0^\infty \frac{\sin(\rho^p e^{ik\pi})}{\rho^p e^{ik\pi\frac{p-1}{p}}} d\rho \\
&= \int_0^\infty \frac{\sin((-1)^k \rho^p)}{(-1)^k \rho^p e^{\frac{-ik\pi}{p}}} d\rho \\
&= e^{\frac{ik\pi}{p}} \int_0^\infty \frac{\sin(\rho^p)}{\rho^p} d\rho \\
&= a_k .
\end{aligned}$$

A partir de cette fonction, nous construisons une multifonction analytique de la façon suivante:

Exemple 3.5

$$f_\lambda(z) = \int_0^z \frac{\sin(\lambda t)^p}{(\lambda t)^p} dt \quad , \quad \lambda \neq 0.$$

On pose $\lambda t = u$, donc f_λ s'écrit:

$$f_\lambda(u) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{u/\lambda} \frac{\sin u^p}{u^p} du ,$$

et admet les valeurs asymptotiques $\dfrac{a_k}{\lambda}$ avec $k = 0, 1, \ldots, 2p-1$, suivant les demi-droites $\arg\left(\dfrac{u}{\lambda}\right) = \dfrac{k\pi}{p}$.

La multifonction définie par:

$$K(\lambda) = \left\{ \frac{a_0}{\lambda}, \frac{a_1}{\lambda}, \ldots, \frac{a_{2p-1}}{\lambda} \right\} ,$$

est analytique sur $\mathbb{C}^*$.

Nous terminons ces exemples par une situation où la multifonction n'est pas analytique. Dans [10], A. Eremenko a construit un exemple d'une fonction méromorphe d'ordre fini qui admet tout point du plan complexe comme valeur asymptotique. Il a utilisé dans sa construction, une fonction intermédiaire F, qu'il a définie comme limite d'une série de fonctions méromorphes uniformément convergente sur les ensembles compacts de $\mathbb{C}$, et qui possède les propriétés suivantes:
F est une fonction méromorphe, d'ordre au plus 2, qui admet tout nombre complexe a appartenant à l'ensemble Δ donné par:

$$\Delta = \{z : 0 \leq \Re z \leq 1, 0 \leq \Im z \leq 1\},$$

comme valeur asymptotique, correspondant à des chemins asymptotiques qui sont des demi-droites issues de l'origine et contenues dans le secteur

$$S = \{z : 0 \leq \arg z \leq 1\}.$$

De plus, F admet aussi la valeur asymptotique 0, suivant toute demi-droite issue de l'origine et contenue dans le secteur $\{z : \pi - 1 \leq \arg z \leq \pi\}$.
Posons, comme Eremenko, $G_1 = 2F - 1 - i$. G_1 est une fonction méromorphe, dont l'ensemble des valeurs asymptotiques contient le disque fermé $\overline{\Delta(0, 1)}$, et ces valeurs asymptotiques sont atteintes suivant les mêmes demi-droites du secteur S que la fonction F.
En répetant le même procédé, nous construisons une autre fonction méromorphe G_2 dont l'ensemble des valeurs asymptotiques couvre le disque fermé $\overline{\Delta(0, 1)}$, et ces valeurs asymptotiques sont atteintes suivant les demi-droites issues de l'origine et contenues dans le secteur $\{z : \pi - 1 \leq \arg z \leq \pi\}$. De plus $G_2(z)$ tend vers 0 uniformément avec z tendant vers l'infini dans le secteur $\{z : 0 \leq \arg z \leq 1\}$.
La fonction G définie par

$$G = G_1 + (G_2 + e^z)^{-1},$$

est une fonction méromorphe d'ordre au plus 2, qui admet tout point de $\overline{\mathbb{C}}$ comme valeur asymptotique. A l'aide de la fonction G, nous donnons cet exemple:

Exemple 3.6 Soit la famille de fonctions méromorphes

$$\{G_\lambda = \lambda G, \quad \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

L'ensemble des valeurs asymptotiques finies $A(\lambda)$ de G_λ est égal à $\mathbb{C}$ pour $\lambda \neq 0$, et au singleton $\{0\}$ pour $\lambda = 0$. L'application associée

$$K : \lambda \longmapsto A(\lambda)$$

ne prend même pas ses valeurs dans $\mathcal{K}(\mathbb{C})$, et donc elle n'est pas analytique.

Nous pouvons former d'autres exemples à partir de la construction de Eremenko, nous ajoutons à G_1 une fonction entière qui admet la valeur asymptotique 0 dans le secteur S, mais qui ne s'y annule pas, puis nous l'inversons. Posons par exemple

$$H = \left(G_1 + e^{-z}\right)^{-1}.$$

L'ensemble des valeurs asymptotiques de H contient le complémentaire du disque fermé $\overline{\Delta(0,1)}$, c'est donc un ensemble non borné, et qui ne peut être compact dans $\mathbb{C}$.

Exemple 3.7 On considère la fonction méromorphe H obtenue plus-haut, et la famille de fonctions formée à partir de H comme suit:

$$\{H_\lambda = H + \lambda, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

L'ensemble des valeurs asymptotiques de H_λ est obtenu par une translation de λ de celui de H, donc il n'est pas compact, et l'application K associée ne satisfait pas à la définition d'une multifonction analytique. Cependant, c'est une multifonction méromorphe, au sens de [3].

CONCLUSION GÉNÉRALE

Pendant la réalisation de cette thèse sur les valeurs asymptotiques, nous avons pris connaissance, en consultant la documentation sur les différentes recherches effectuées à leur sujet, du rôle primordial qu'elles occupent dans la compréhension et l'explication du comportement asymptotique d'une fonction entière ou méromorphe, et qui n'a d'égal que la difficulté de les saisir. C'est pour cela que notre étude a été limitée aux familles de fonctions entières d'ordre fini, sans points critiques, et ayant un ensemble fini de valeurs asymptotiques. Nous espérons cependant que, en exploitant d'autres aspects de la théorie de Nevanlinna, ainsi que les propriétés de la dérivée schwarzienne, les résultats obtenus, quoique partiels, puissent être étendus d'une manière progressive, à des familles de fonctions plus générales, comme celles des fonctions méromorphes dont la dérivée schwarzienne est un polynôme ou une fraction rationnelle.

Une autre approche, qui rendrait peut-être les valeurs asymptotiques d'une fonction méromorphe f plus accessibles, serait l'utilisation de leur propriété d'être des valeurs singulières de la fonction inverse f^{-1}. Le développement du problème en suivant cette direction passe par la surface de Riemann définie par f^{-1}, et qui admet un point de branchement à une infinité de branches en chaque point singulier qui mène à une valeur asymptotique de f.

Nous avons donc essayé de montrer l'analyticité de la multifonction K, associée aux valeurs asymptotiques finies des fonctions entières d'une famille $\{f_\lambda : \lambda \in D\}$, seulement dans la situation la plus précise où les fonctions satisfont à la caractérisation de Nevanlinna, et même dans ce cas particulier, nous étions confrontée à un autre grand problème de l'analyse complexe qui est le prolongement analytique d'une fonction holomorphe au-delà d'un ensemble donné, qui peut être, dans notre cas, un ensemble parfait, discret, et de mesure nulle.

Le prolongement analytique d'une fonction à un ensemble de singularités, proposé par P. Painlevé pendant qu'il cherchait des solutions d'équations différentielles, a suscité beaucoup de discussions. Nous citons d'abord ce que L. Zoretti a observé dans son article [34, page 49]:

"A vrai dire les recherches de M. Painlevé ne portent pas sur les lignes définies d'une façon générale mais seulement sur les lignes ayant un arc. Mais il est bien vraisemblable que le résultat demeure exact dans le cas général. Quant à l'existence d'un ensemble parfait de lignes singulières, elle n'est pas incompatible avec la continuité de la fonction et l'on peut en former facilement des exemples."

A. Denjoy a lui aussi, participé d'une manière significative à la discussion, et il n'y a pas mieux que ses propres propos, écrits dans [6], pour exprimer ses idées:

"On a très longtemps considéré comme vraisemblable le théorème suivant: Une fonction uniforme qui possède des points singuliers formant un ensemble discontinu ne peut rester continue dans ce domaine. Plusieurs démonstrations, dont aucune cependant n'échappait à des objections diverses, furent tentées. M'étant demandé si les difficultés rencontrées et non surmontées ne tenaient pas à l'inexactitude de théorème, j'ai été conduit à construire des fonctions qui le mettent effectivement en défaut."

Il est à noter cependant, que les exemples de A. Denjoy, portent sur des ensembles de singularités parfaits et discontinus, mais d'aire non nulle.

Les exemples de A. Denjoy, ainsi que d'autres, ont amené L. Zoretti à écrire une longue dissertation dans son livre [34] en 1911. Il y a parlé de situations non résolues de prolongement analytique, comme celle-ci qu'il a donnée juste après l'exemple de Denjoy: [34, page 89]

"L'hypothèse sur l'aire est essentielle dans la démonstration, sans quoi l'exemple ne prouve rien, $f(x)$ étant nulle. Il reste en tous cas à élucider le cas intermédiaire où l'ensemble est de longueur infinie (semi-superficiel) et d'aire nulle. La question est d'autant plus difficile (à résoudre complètement) que la méthode directe ne peut plus rien donner: il semble en effet bien difficile d'y introduire une hypothèse sur la densité des points de l'ensemble. Tout ce qu'on peut espérer, c'est à défaut de théorème général, de prouver par un exemple la possibilité de telle ou telle circonstance, sur laquelle il

serait évidemment téméraire d'émettre une opinion."
Les propos de cette dernière citation ne sont en aucun cas exagérés, comme le confirme la rareté des résultats concernant le prolongement analytique dans cette situation.

Nous souhaitions obtenir, à la suite de ce travail, que la multifonction K, construite à partir des valeurs asymptotiques, soit analytique dans son domaine de définition tout entier. Un tel résultat pourrait trouver des applications interessantes dans la théorie de l'itération des fonctions entières transcendantes. Nous pensons particulièrement à l'article [18] de B. Krauskopf et H. Kriete, sur la convergence en noyau des composantes hyperboliques, où les conséquences de l'analyticité de la multifonction K peuvent alléger considérablement les hypothèses sur les familles de fonctions entières considérées.

Bibliographie

[1] AUPETIT B., *Analytic Multifunctions and their Applications*, In Proceedings of the NATO advanced study institute "Complex Potential Theory", Kluwer Acad. Pub., 1995.

[2] AUPETIT B., *A Primer on Spectral Theory*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1991.

[3] BARIBEAU L., RANSFORD T. J., *Meromorphic Multifunctions in Complex Dynamics*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, Vol. 12, 1992, 39-52.

[4] BERGWEILER W., EREMENKO A. E., *On the Singularities of the Inverse to a Meromorphic Function of Finite Order*, Revista Matemática Iberoamericana, Vol. 11, 1995, 355-373.

[5] CARTWRIGHT M. L., *Integral Functions*, Cambridge, University Press, 1956.

[6] DENJOY A., *Fonctions uniformes à singularités discontinues*, C. R. Acad. Sci. Paris, 148 (1909). Apparu aussi dans: Un demi-siècle de notes communiquées aux académies de Paris, d'Amsterdam, des lincei, I La variable complexe, 1957.

[7] DENJOY A., *Sur les fonctions entières de genre fini*, C. R. Acad. Sci. Paris, 145 (1907). Apparu aussi dans: Un demi-siècle de notes communiquées aux académies de Paris, d'Amsterdam, des lincei, I La variable complexe, 1957.

[8] DEVANEY R. L., KEEN L., *Dynamics of Meromorphic Maps: Maps with Polynomial Schwarzian Derivative*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, tome. 22, 1989, 55-79.

[9] EREMENKO A. E., *Meromorphic Functions with Small Ramification*, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 4, 1993, 1193-1218.

[10] EREMENKO A. E., *Set of Asymptotic Values of a Meromorphic Function of Finite Order*, Mathematical Notes, Vol. 24, 1979, 914-916.

[11] FUCHS W. H. J., *Topics in Nevanlinna Theory*, Proceedings of the NRL Conference on Classical Function Theory. Edited by Fred Gross, 1970, 1-32.

[12] HILLE E., *Analytic Function Theory*, Volume II. Ginn and Company, 1962.

[13] HILLE E., *Lectures on Ordinary Differential Equations*. London. Addison-Wesley, 1969.

[14] HILLE E., *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*, John Wiley and Sons. New York London Sydney Toronto 1974.

[15] IVERSEN F., *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*. Thèse de Doctorat. Helsingfors, 1914.

[16] JONES G. A., SINGERMAN D., *Complex Functions. An algebraic and geometric viewpoint*, Cambride University Press, 1987.

[17] KISAKA M., *Local Uniform Convergence and Convergence of Julia Sets*. Nonlinearity, Vol. 8, 1995, 273-281.

[18] KRAUSKOPF B., KRIETE H., *Kernel Convergence of Hyperbolic Components*. Ergodic Theory and Dynamical Systems, Vol. 17, 1997, 1137-1146.

[19] LEHTO O., *Univalent Functions and Teichmümller Spaces*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo, 1987.

[20] MARKUSHEVICH A. I., *Theory of Functions of a Complex Variable*, Vol. II, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[21] NEVANLINNA R., *Analytic Functions*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin. 1970.

[22] NEVANLINNA R., *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Chelsea publishing company, Bronx, New York. Second edition, 1974.

[23] NEVANLINNA R., *Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten*. Acta Mathematica, Vol. 58, 1932, 295-373.

[24] OKA K., *Note sur les familles des fonctions analytiques multiformes etc.*, Journal of Science of Hiroshima University, Serie A, Mathematics, Physics, Chemistry, 1934, 93-98.

[25] PAINLEVÉ P., *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, Thèse, Annales. Faculté des Sciences. Université de Toulouse 2, 1887. Apparue dans: Oeuvres de Paul PAINLEVÉ, Tome II, Editions du centre national de la recherche scientifique, 1974.

[26] RANSFORD T. J., *Analytic Multivalued Functions*. Doctoral thesis, University of Cambridge. 1984.

[27] RANSFORD T. J., *Interpolation and Extrapolation of Analytic Multivalued Functions*. Proceedings. London Mathematical Society 3, 50 (1985), 480-504.

[28] SCHIFF J. L., *Normal Families*, Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo Hong-Kong Barcelona Budapest, 1993.

[29] SLODKOWSKI Z., *Analytic Set-valued Functions and Spectra*. Mathematische Annalen. Vol. 256. 1981. 363-386.

[30] TITCHMARSH E. C., *The Theory of Functions*, Second edition, Oxford University Press. 1952.

[31] VALIRON G., *Fonctions entières d'ordre fini et fonctions méromorphes*. Monographies de l'Enseignement Mathématique. no 8. Genève, 1960.

[32] ZHANG GUAN-HOU, *Theory of Entire and Meromorphic Functions. Deficient and Asymptotic Values and Singular Directions*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 122, 1993.

[33] ZORETTI L., *Leçon sur le prolongement analytique*, Paris, Gauthier-Villars, 1911.

[34] ZORETTI L., *Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers*, Journal de mathématiques pures et appliquées, (6ème série), tome. I, 1905.